Főiskolák Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatóinak XXVIII. Országos Konferenciája, Nyíregyházi Főiskola, 2004. augusztus 25-27.

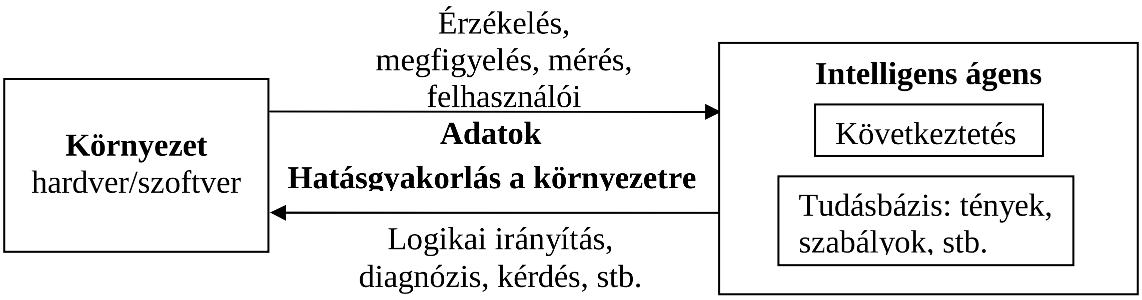
Fuzzy következtetési módszerek

Johanyák Zsolt Csaba
Kecskeméti Főiskola, GAMF Kar, Kalmár Sándor Informatikai Intézet, Informatika Tanszék
johanyak.csaba@gamf.kefo.hu

A nyolcvanas évek második felétől egyre szélesebb körben nyert alkalmazást egy numerikus bizonytalanság kezelési módszer, a fuzzy logika. Mosógéptől a vérnyomásmérőn át a fényképezőgépig hétköznapi életünk sok használati cikkében lapulhat olyan vezérlés, ami a Lotfi A. Zadeh által 1965-ben bevezetett új fogalomra épülő irányítást alkalmaz.
A fuzzy megközelítés segítségével irányíthatóvá válnak olyan folyamatok, amelyek a klasszikus elméletekkel csak igen körülményesen lennének kezelhetők. Ezek általában ember által jól kézben tarthatóak, azonban matematikai modelljük vagy nem áll rendelkezésre, vagy túlságosan komplex, esetleg nagy számításigénye következtében valós idejű alkalmazásokhoz nem megfelelő.
Előadásom célja a fuzzy következtetési módszerek áttekintése kiindulva az ismertebb, sűrű szabálybázison alapuló „hagyományos” kompozíciós módszerektől, eljutva egészen a hiányos szabálybázis esetén alkalmazható technikákig.

1. Mi a következtetés?

Tegyük fel, hogy van egy intelligens ágensünk, ami valamilyen szinten érzékeli környezetét, azaz valamilyen adatot (információt) kap annak állapotáról (megfigyelés, mérés, felhasználói input, stb.), és ezek alapján valamilyen kimenetet állít elő (vezérlő utasítás, diagnózis, tanács, stb.), azaz hatást gyakorol környezetére. Következtetésnek nevezzük azt a folyamatot, amelynek során a bemenet és a rendelkezésre álló ismeretanyag alapján létrejön a kimenet.



1. ábra. Következtetés

2. Következtetés fuzzy rendszerekben

Egy fuzzy rendszer esetén a rendelkezésre álló ismeretanyag, azaz az ágens tudásbázisa egy szabályrendszer formájában áll rendelkezésre. A be- és kimenő adatok crisp vagy fuzzy jellegétől függően a következetési folyamat végrehajtása előtt és után fuzzifikálásra és defuzzifikálásra is szükség lehet. A jelen előadás csak a tényleges fuzzy következtéssel, a bemenő és kimenő fuzzy halmazok közötti leképezés megvalósításával foglalkozik.
A fuzzy következtetés menete hasonlít az előre láncoló (adatvezérelt) szabályalapú rendszerekhez. Az első eltérés ott jelentkezik, hogy egy végrehajtási cikluson belül több szabály feltétel része kiértékelésre kerül párhuzamos módon. Ennek feltétele az, hogy a tagsági függvény értéke nullánál nagyobb legyen az adott feltételre. A következtetés eredményeképpen a Sugeno féle módszer kivételével egy fuzzy halmaz keletkezik.

3. Sűrű (lefedő) szabálybázisra épülő módszerek

Egy szabálybázist akkor tekintenek lefedőnek, ha minden lehetséges megfigyelés kombináció esetén rendelkezésre áll legalább egy aktivizálható szabály, aminek feltételei nullától eltérő tagsági függvény értékkel teljesülnek. Egy fuzzy logikai irányítás csak akkor tekinthető megbízhatóan működőképesnek, ha közvetlen vagy közvetett úton teljesül a fenti elvárás, azaz, ha esetlen nem is lefedő a szabálybázis, de a hiányzó szabályok becsléssel pótolhatók. A továbbiakban sűrű szabálybázis esetére az alábbi módszereket tekintjük át:

- Kompozíciós fuzzy következtetés
- Kompakt fuzzy következtetés
- Sugeno féle fuzzy következtetés
- Döntési mátrixon alapuló fuzzy következtetés

3.1. Kompozíciós fuzzy következtetés

A kompozíciós fuzzy következtetés alapötletét Lotfi A. Zadeh definiálta 1973-ban. 1975-ben Ebrahim Mamdani kis mértékben átdolgozta, így ez a módszer ma Mamdani nevét viseli. Gondolatmenete egyszerű és könnyen áttekinthető. Az alapelv az, hogy minél jobban illeszkedik egy megfigyelés egy szabály feltétel részére (minél nagyobb a tagsági függvény érték), az adott szabály következmény része annál nagyobb súllyal vesz részt az eredményként előálló fuzzy halmazban.

A következtetés eredményeként keletkező fuzzy halmazt a bemenő adatok fuzzy halmaza és a szabálybázist leíró fuzzy reláció kompozíciójaként állítják elő. A következményt előállító képletek n dimenziós megfigyelés esetére az alábbiak [1]:

$$y = (x_1 , x_2 ,..., x_n) \circ \mathbf{R} \tag{1}$$

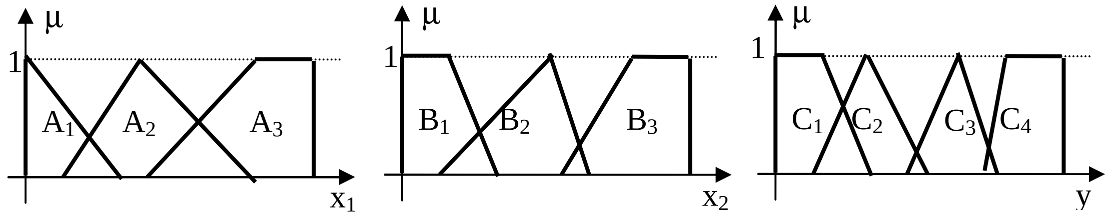
$$\begin{aligned}
\mu_{(x1,x2,...,xn)\circ\mathbf{R}}(y) &= \max_{x_1,x_2,...,x_n} \min[\, \mu_{x_1}(x_1),\mu_{x_2}(x_2),...,\mu_{x_n}(x_n) \,,\, \mu_{\mathbf{R}}(x,y) \,] = \\
&= \max_{x_1,x_2,...,x_n} \min[\, \mu_{x_1}(x_1),\mu_{x_2}(x_2),...,\mu_{x_n}(x_n) \,,\, \cup^{r}{}_{i=1}\, \mu_{R_i}(x_1,x_2,..,x_n,y) \,] = \\
&= \max_{x_1,x_2,...,x_n} \min[\, \mu_{x_1}(x_1),\mu_{x_2}(x_2),...,\mu_{x_n}(x_n) \,, \\
&\qquad \cup^{r}{}_{i=1} \min(\, \mu_{A_{1,i}}(x_1),\mu_{A_{2,i}}(x_2),...,\mu_{A_{n,i}}(x_n),\mu_{B_i}(y) \,) \,] = \\
&= \max_{x_1,x_2,...,x_n} \cup^{r}{}_{i=1} \min[\, \mu_{x_1}(x_1),\mu_{x_2}(x_2),...,\mu_{x_n}(x_n) \,, \\
&\qquad \mu_{A_{1,i}}(x_1),\mu_{A_{2,i}}(x_2),...,\mu_{A_{n,i}}(x_n),\mu_{B_i}(y) \,) \,] = \\
&= \cup^{r}{}_{i=1} \max_{x_1,x_2,...,x_n} \min[\, \mu_{x_1}(x_1),\mu_{x_2}(x_2),...,\mu_{x_n}(x_n) \,, \\
&\qquad \mu_{A_{1,i}}(x_1),\mu_{A_{2,i}}(x_2),...,\mu_{A_{n,i}}(x_n),\mu_{B_i}(y) \,) \,] = \\
&= \cup^{r}{}_{i=1}\, \mu_{(x1,x2,...,xn)\circ R_i}(y)
\end{aligned} \tag{2}$$

ahol

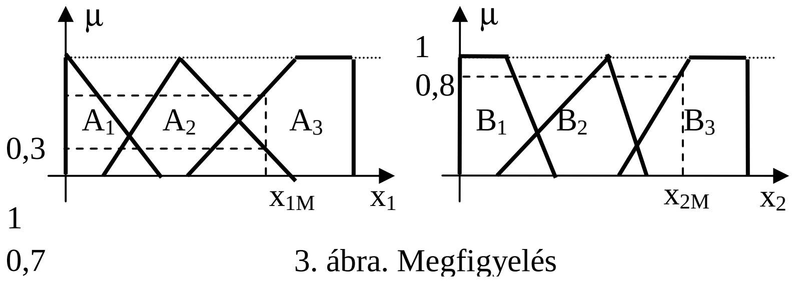
X	a megfigyelés univerzum
Y	a következtetés univerzum
$x_i \in X$	a megfigyelés fuzzy halmaza az i. dimenzióban
$y \in Y$	a következtetés fuzzy halmaza
R	a szabálybázis reláció
μ	tagsági függvény

Az alkalmazott halmazműveletek után ezt a következtetési módot max-min kompozíciónak is nevezik. Használatát tekintsük át egy egyszerű példán keresztül. Tegyük fel, hogy a megfigyelés kétdimenziós (x_1 és x_2), az első érték (x_1) univerzumának partíciója három halmazból (nyelvi értékből) áll, ezek A_1, A_2 és A_3. Továbbá a második érték (x_2) univerzumának partíciója szintén három halmazból áll, amelyek a B_1, B_2 és B_3 azonosítókkal rendelkeznek. A következmény univerzum négy nyelvi értéket tartalmaz (C_1, C_2,C_3 és C_4). A megfigyelés és következmény univerzumok partícióit a 2. ábra tartalmazza. A tudásbázis az alábbi szabályokat tartalmazza:

HA x_1 az A_2-be tartozik **ÉS** x_2 a B_3-ba tartozik **AKKOR** y a C_3-ba tartozik
HA x_1 az A_3-ba tartozik **ÉS** x_2 a B_3-ba tartozik **AKKOR** y a C_2-be tartozik
…

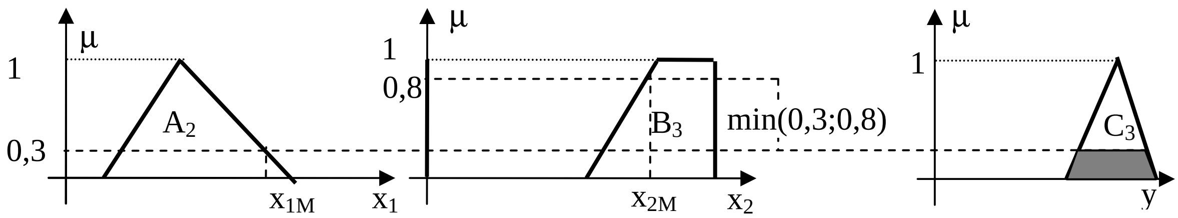


2. ábra. A megfigyelés és következmény univerzumok partíciói

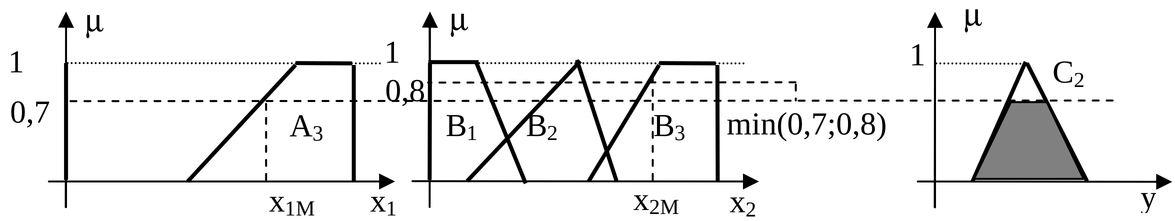


3. ábra. Megfigyelés

Rendszerünk egy konkrét megfigyelés eredményeként kap egy x_{1M} és egy x_{2M} értéket, melyekre illeszthető az első két szabály, mivel x_{1M} a második és a harmadik nyelvi értéknél is nullától különböző tagsági függvény értékkel rendelkezik, és x_{2M} a B_3 fuzzy halmazba sorolható nullánál nagyobb értékkel (3. ábra).



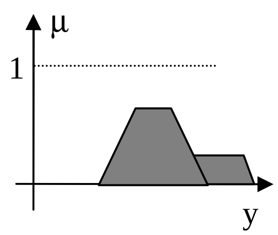
4. ábra. Az első szabály kiértékelése



5. ábra. A második szabály kiértékelése

Sorra vesszük a tüzelésre alkalmas szabályokat. Ha az aktuális szabály feltételrésze több nyelvi érték **ÉS** kapcsolatából tevődik össze, akkor vesszük ezek tagsági függvény értékeit, és kikeressük közülük a legkisebbet. **VAGY** kapcsolatnál viszont a legnagyobb tagsági értékkel megyünk tovább.

A szabály következmény részében szereplő nyelvi érték tagsági függvény grafikonján húzunk egy vízszintes vonalat az előbb meghatározott értéknél, és egy területet képzünk, amelyet a vízszintes tengely, a fuzzy halmaz hordozója és az előbbiekben definiált szintvonal határol. Mindkét szabályra előállítjuk egy ilyen területet (4. és 5. ábra), majd ezek unióját képezzük (6. ábra). Ez lesz a következtetés eredményeként előálló fuzzy halmaz.
A módszer előnyös tulajdonsága intuitív volta és könnyű megvalósíthatósága.



6. ábra. A következtetés eredménye

3.2. Kompakt fuzzy következtetés

A kompakt fuzzy következtetés a kompozíciós következtetés módosított változata. Itt a következtetés eredménye egy reláció, ami a megfigyelés által kapott fuzzy halmaz valamint a szabálybázist leíró reláció metszeteként keletkezik, és az alábbi képletekkel írható le [1]:

$$R_C = [x \downarrow (Y - X)] \cap R \tag{3}$$

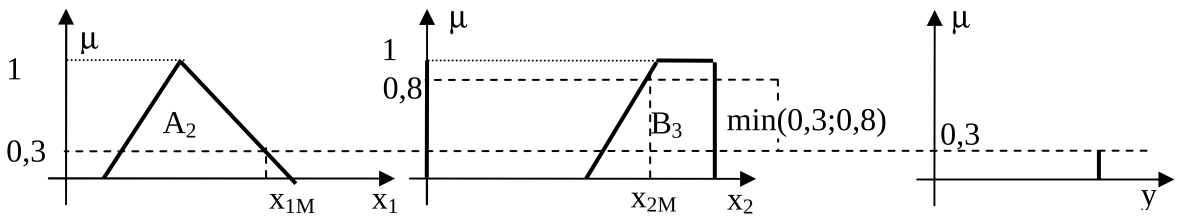
$$\begin{aligned} \mu_{R_C}(x,y) &= \min[\mu_x(x), \mu_R(x,y)] \\ &= \min\left[\mu_x(x), \cup_{i=1}^{r} \mu_{R_i}(x,y)\right] \\ &= \min\left[\mu_x(x), \cup_{i=1}^{r} \min\left(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y)\right)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

ahol
R_C a következtetés reláció
Az előző módszerhez hasonlítva az eltérés ott jelentkezik, hogy míg kompozíciós technika esetén az eredményt a következtetés reláció következtetés univerzumra vett vetülete határozza meg, addig a kompakt esetben az eredményt a következtetés reláció térbeli súlypontjának következtetés univerzumra vett vetülete adja.
Gyakorlati szempontból az eltérés az érzékenységben mutatkozik. A kompakt módszer következtetés relációjában erősebb szereppel bír a megfigyelés és a feltétel halmazok hasonlósága, így ez a módszer érzékenyebb, mint a kompozíciós társa.
A kompakt módszer előnyős tulajdonsága, hogy alkalmazása esetén a következtetés jobban hasonlít a domináns szabály következmény részéhez. Hátránya viszont, hogy algoritmusának komplexitása és így számításigénye jelentősen meghaladja a kompozíciós módszerét.

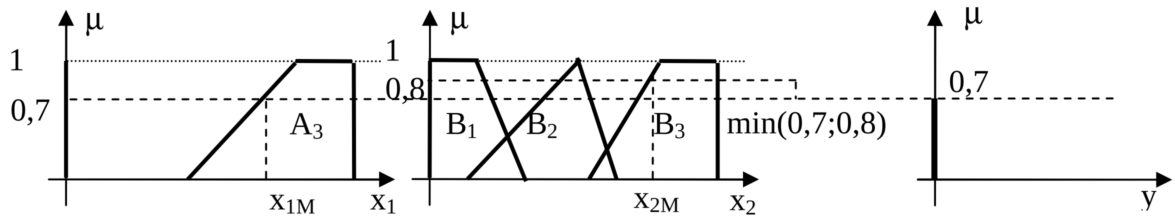
3.3. Sugeno féle fuzzy következtetés

A Michio Sugeno által javasolt következtetési mód részben hasonló a Mamdani féle módszerhez. Az első eltérés a szabályok következmény részében jelentkezik, ahol nem fuzzy halmaz szerepel, hanem a következmény a feltételek matematikai függvényeként van megadva az alábbi mintához hasonlóan [3]:
HA x_1 az A_2-be tartozik **ÉS** x_2 a B1-be tartozik **AKKOR** $y=f(x_1,x_2)$,
ahol $f(x_1,x_2)$ a következményt megadó függvény.
Legyen egy kétdimenziós megfigyeléssel dolgozó és a 3.1. pontban alkalmazott partícióval rendelkező rendszer, valamint az alábbi két szabály.
HA x_1 az A_2-be tartozik **ÉS** x_2 a B_3-ba tartozik **AKKOR** $y = x_1 + x_2 + 1$
HA x_1 az A_3-ba tartozik **ÉS** x_2 a B_3-ba tartozik **AKKOR** $y = x_1 - x_2 + 1$
A következtetés kompozíciós jellegű. Több szabály aktivizálódása (tüzelése) esetén az eredményt az egyes szabályoknál számolt következmények súlyozott átlagaként határozzák meg [7]. A súlyszámokat ugyanazzal a módszerrel határozzák meg, mint a kompozíciós módszernél a következmény tagsági függvény területhatároló egyenesét. A következtetés eredményeképp egy valós érték keletkezik, így nincs szükség defuzzifikálásra. Példánkban a

megfigyelés az x_{1M}=6 és az x_{2M}=7 értékeket tartalmazza. Az első szabály kiértékelése után az y=14 eredmény keletkezik, amihez a 0,3-as tagsági függvény érték tartozik (7. ábra).



7. ábra. Az első szabály kiértékelése

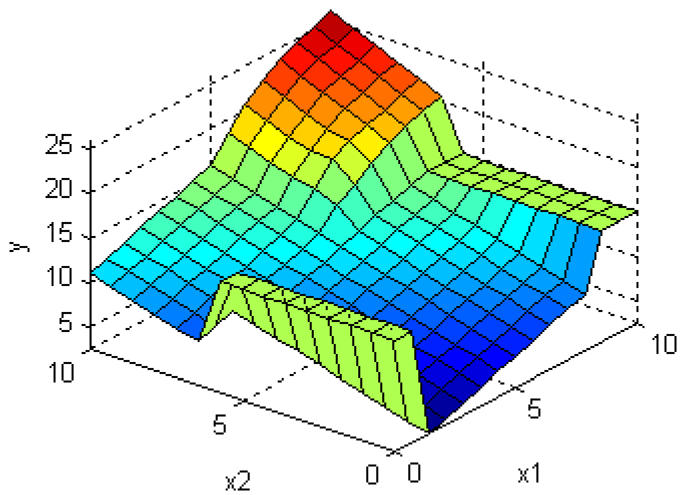


8. ábra. A második szabály kiértékelése

A második szabály kiértékelése után az y=0 eredmény keletkezik, amihez a 0,7-es tagsági függvény érték tartozik (8. ábra). A rendszer kimenetén jelentkező súlyozott átlag:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{14 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}7}{0{,}3 + 0{,}7} = 14 \tag{5}$$

A rendszer működését 9. ábrán látható válaszfelület segítségével jellemezhetjük. A Sugeno típusú fuzzy modellre épülő gyakorlati alkalmazások zöme „nulladrendű", ami azt jelenti, hogy a szabályok következményében szereplő függvények konstans értékűek, mivel a magasabb rendű függvények jelentősen nagyobb számításigénnyel járnak.



9. ábra. Válaszfelület

A Sugeno módszer előnyös tulajdonságának tekinthető [7], hogy a jól működik lineáris technikákkal (PID vezérlők), biztosított a kimeneti felület folytonossága, jól alkalmazható matematikai elemzéshez, a kompozíciósnál kisebb számításigényű, és nem igényel defuzzifikálást.

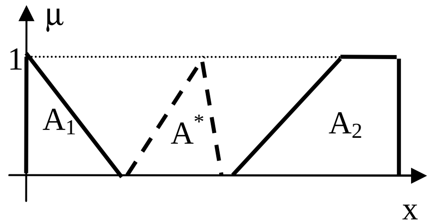
3.4. Döntési mátrixon (look-up table) alapuló fuzzy következtetés

A döntési mátrixon alapuló következtetés nem egy önálló módszer, csupán egy eszköz, amivel fuzzy következtetésen alapuló rendszerünk működését jelentős mértékben meggyorsíthatjuk. Alkalmazásának előfeltétele, hogy úgy a megfigyelési oldalon, mint az eredmény oldalon a fuzzy halmazok lehetséges értékeit tartalmazó univerzumok diszkrétek

legyenek, és a felvehető értékek száma kisebb legyen az alkalmazható tárolási technika által meghatározott korlátoknál.
A módszer alapgondolata az, hogy minden lehetséges bemenő értékre egy kiválasztott következtetési módszerrel (pl. Mamdani vagy Sugeno típusúval) előre kiszámítják az eredményt, és azt egy táblázatban tárolják. A használat során csupán egy keresési műveletre kerül sor. A módszer előnye a gyorsaság, hátránya a nagy tároló kapacitás iránti igény.
A comp.ai.fuzzy hírcsoport archívuma alapján a rendszer „belövése”, a szabályok finomhangolása után, a gyakorlati alkalmazásokban előszeretettel választják ezt a megoldást.

4. Ritka (nem lefedő) szabálybázisra épülő módszerek

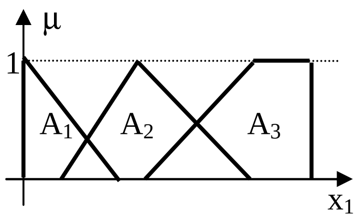
Ritkának nevezzük a szabálybázist, ha nem rendelkezünk szabállyal az összes lehetséges megfigyelés kombinációra. Ez azt jelenti, hogy egyes megfigyelt értékeknél, semmilyen szabályt nem tud aktivizálni a rendszer (10. ábra), így a kimenő oldalon nem keletkezik következtetés.



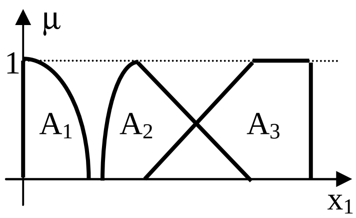
10. ábra. Az A^* nyelvi érték nem szerepel egyetlen szabály feltétel részében sem

Hogyan keletkezik ritka szabálybázis?

- A szakértőtől vagy más forrásból (pl. neurális hálózat alapú tanulási technika) beszerzett információ alapján generált szabályok nem fednek le minden lehetséges megfigyelés értéket. Például a 10. ábra szerinti partíciót feltételezve egy egydimenziós megfigyelés univerzumon a szabályrendszer csak olyan elemeket tartalmaz, amelyeknek feltétel részében az A_1 vagy az A_2 fuzzy halmazok szerepelnek.
- A hangolás során a fuzzy halmazok alakjának módosulása következtében ezek között „lyukak” keletkeznek (11. és 12. ábra).



11. ábra. Partíció hangolás előtt



12. ábra. Partíció hangolás után

- A nyelvi változók száma olyan nagy, hogy még, ha elő is tudnák állítani az összes lehetséges szabályt, akkor se volna lehetséges az adott hardver feltételek között tárolni azokat. Például $n=3$ dimenziós megfigyelés és dimenziónként $k=5$ nyelvi érték esetén feltételezve, hogy a szabályok feltételrészében ezek között csak ÉS kapcsolat van, és minden dimenzió megjelenik mindegyik szabály feltétel részében, a szükséges szabályok száma: $k^n=125$. Ha az előzőekben említett megkötésektől eltekintünk, a szükséges szabályszám tovább növekszik. Ezért ilyen esetekben mesterségesen teszik ritkává a szabálybázist.
- A nagy szabályszám megnöveli a következtetéshez szükséges idő nagyságát, így rontja a rendszer teljesítményét. Ebben az esetben is elképzelhető a szabálybázis mesterséges ritkítása.

A lefedettség hiányában egyes megfigyeléseknél a szabályok közelítésén alapuló módszereket kell alkalmazni a hiányzó következmények előállítására. Fontosabb becslésen alapuló módszerek:

- Szabályok lineáris interpolációján alapuló fuzzy következtetés.

- Szabályinterpoláció testmetszéssel.
- Módosított α-vágat alapú interpoláció.
- Szabályok lineáris extrapolációján alapuló fuzzy következtetés.
- Fuzzy szabályok regressziójára épülő fuzzy következtetés.

Ezen módszerek segítségével megpróbálják betömni a hiányzó szabályok miatt keletkezett „lyukakat”, azaz vizsgálják a megfigyelés hasonlóságát a létező szabályokhoz, és ennek alapján előállítják a következmény becslését. A követett alapelv az, hogy minél jobban hasonlít a megfigyelés egy szabály feltételére, annál jobban hasonlítson a becsült következmény az adott szabály következményére [9]. A becslés végrehajtásának előfeltétele, hogy legalább részben értelmezhető legyen egy rendezési reláció a szabályok feltétel és következmény részében szereplő fuzzy halmazokon [**2**]. A feladat megoldásához először definiálni kell a fuzzy halmazok hasonlóságát.

4.1. Fuzzy halmazok hasonlóságának mérése

A fuzzy halmazok hasonlóságának értékelése terén alapvetően három megközelítéssel találkozunk. Ezek az alábbiak:

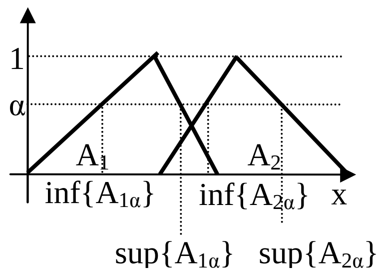
1. Az érintett FH-k metszetének maximális tagsági értékével.
   - Előny: könnyen, gyorsan számítható.
   - Hátrány: nem képes kezelni azokat az eseteket, amikor az érintett két vagy több FH nem metszi egymást, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk ezen megközelítéssel.
2. FH-ok távolságával.
   - Előny: minden esetben alkalmazható.
   - Hátrány: nagyobb számításigény.
3. Közép fuzzy távolsággal és a fuzzy szélességgel. Ezen hasonlóságmérési technikán alapul a Vass, Kalmár és Kóczy [10] által javasolt interpolációs eljárás, ami csökkenti a távolságalapú megközelítés alkalmazhatósági korlátait.

4.2. Fontosabb fogalmak

4.2.1. Fuzzy halmazok távolsága

Fuzzy halmazoknál a megelőzi („<”) relációt az α-vágatok segítségével értelmezzük, ha az A és B fuzzy halmazok normálisak és konvexek, akkor kijelenthetjük, hogy A<B akkor teljesül, ha $\forall$ $\alpha\in(0,1]$-re $\inf\{A_\alpha\}<\inf\{B_\alpha\}$ és $\sup\{A_\alpha\}<\sup\{B_\alpha\}$. Az inf és sup a vágat által előállított intervallum alsó és felső végpontjai [1].

Két fuzzy halmaz távolságát α-vágataik végpontjainak euklideszi távolságait felhasználva, két - a [0,1] intervallumon értelmezett - fuzzy halmazzal fejezzük ki. A két mennyiséget alsó (d_L^α) és felső (d_U^α) távolságnak nevezzük [1], és az (5) valamint a (6) képlettel számítjuk.



13. ábra. inf és sup értelmezése

$$d_L^\alpha(A_1,A_2)=\inf\left\{A_2^\alpha\right\}-\inf\left\{A_1^\alpha\right\} \tag{5}$$

$$d_U^\alpha(A_1,A_2)=\sup\left\{A_2^\alpha\right\}-\sup\left\{A_1^\alpha\right\} \tag{6}$$

4.2.2. Közép fuzzy távolság

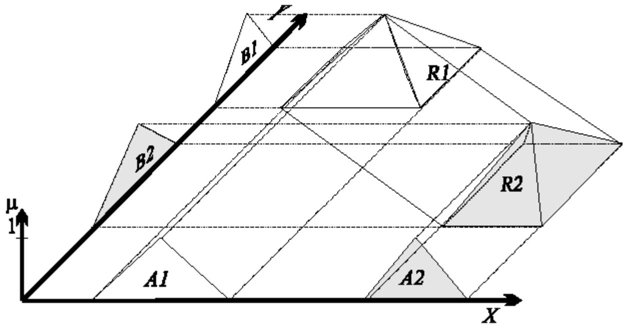
A fuzzy távolsághoz hasonlóan itt is α-vágatonként határozzuk meg a vizsgált fuzzy halmazok közelségét. Az előzőekben használt alsó és felső távolságok helyett itt azok átlagával (7) dolgozunk [**2**].

$$d_M^\alpha(A,B)=\frac{d_L^\alpha(A,B)+d_U^\alpha(A,B)}{2} \tag{7}$$

4.2.3. Fuzzy szélesség

Egy fuzzy halmaz α-vágatainak szélességét írja le α függvényében. Minél specifikusabb egy fuzzy halmaz, annál keskenyebb. Pl. $Sz=\{5|_{\alpha=0},3|_{\alpha=0,5},1|_{\alpha=1}\}$ három α-vágatra adja meg a szélesség értékeket.

4.3. Szabályok lineáris interpolációján alapuló fuzzy következtetés



14. ábra. Ritka szabálybázis

Az interpoláción alapuló szabálybecslő módszerek alkalmazásának előfeltétele, hogy találjunk legalább két olyan szabályt, ami közrefogja a megfigyelést. Távolság-alapú hasonlóság méréssel dolgozva a becsült szabály meghatározásának alapgondolata az, hogy minél közelebb van az x megfigyeléshez tartozó A^* fuzzy halmaz az A_i (A_1, A_2, stb.) feltételhez, annál közelebb legyen a becsült y következtetéshez tartozó B* fuzzy halmaz a B_i (B_1, B_2, stb.) következményhez. Ez az elvárás a Kóczy és Hirota által javasolt lineáris interpoláció [**2**] esetén a távolságok arányba állításával valósul meg.

A 14. ábrán két szabályból álló szabályrendszer látható, mindkettőnél a feltétel és a következmény részben csak egy nyelvi érték szerepel. A szabályrendszer ritka, A_1 és A_2 között jelentkező megfigyelés esetén a következtetéshez szabálybecslésre van szükség. Felállítva a távolság aránypárokat (8) behelyettesítve az (5) és (6) képleteket, α-vágatonként külön az alsó és felső értékekre meghatározhatjuk a következmény fuzzy halmaz alsó (9) és felső pontjait (10).

$$\frac{d_i^\alpha(A_1,A^*)}{d_i^\alpha(A^*,A_2)}=\frac{d_i^\alpha(B_1,B^*)}{d_i^\alpha(B^*,B_2)} \tag{8}$$

ahol i helyére U vagy L kerül, aszerint, hogy alsó vagy felső távolságról van-e szó.

$$\inf\{B^{*\alpha}\}=\frac{d_L^\alpha(A_1,A^*)\cdot\inf\{B_2^\alpha\}+d_L(A^*,A_1)\cdot\inf\{B_1^\alpha\}}{d_L^\alpha(A_1,A^*)+d_L(A^*,A_1)} \tag{9}$$

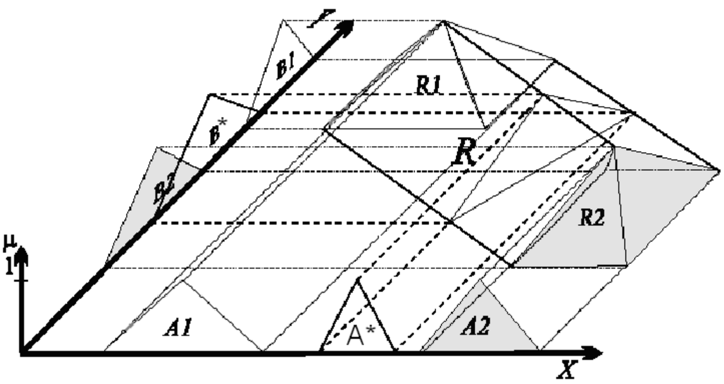
$$\sup\{B^{*\alpha}\}=\frac{d_L^\alpha(A_1,A^*)\cdot\sup\{B_2^\alpha\}+d_L(A^*,A_1)\cdot\sup\{B_1^\alpha\}}{d_L^\alpha(A_1,A^*)+d_L(A^*,A_1)} \tag{10}$$

A keresett következtetés fuzzy halmaz felbontási alakban áll elő α-vágatok uniójaként [1]. A 15. ábrán a közelítés két szabályra épülő lineáris interpolációval történik.

Az interpolációhoz több szabályt is figyelembe vehetünk a 2k szabályra épülő módszer segítségével. Alkalmazásának feltétele, hogy a megfigyelés mindkét oldalán úgy a feltétel, mint a következmény részben rendelkezésre álljon k darab szabály. Ezt az elvárást szeparációs feltételnek nevezik.

A lineáris interpoláció hatékony működéshez a szabályok feltétel és következmény részében szereplő fuzzy halmazok formája egyszerű kell legyen, lehetőleg szakaszonként lineáris (pl. háromszög) annak érdekében, hogy néhány jellegzetes ponttal leírhatóak legyenek, így elérhető, hogy csak a lényeges α-vágatokra legyen szükséges a számítások elvégzése.

A fentiekben ismertetett lineáris interpolációs módszer előnye könnyű értelmezhetősége és megvalósíthatósága, valamint kis számítási komplexitása. Hátrányos tulajdonsága az, hogy csak a (11) és (12)-ben [11,8] megfogalmazott feltételek teljesülése esetén alkalmazható, más esetekben a következmény abnormális fuzzy halmaz megjelenéséhez vezethet.



15. ábra. Lineáris interpoláció

$$\frac{d_L^{\alpha}\left(A_1, A^*\right)}{d_L^{\alpha}\left(A_1, A^*\right)+d_L\left(A^*, A_1\right)}=\beta\in[0,1] \tag{11}$$

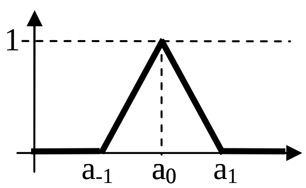
$$\frac{d_L^{\alpha}\left(B_2^{\alpha}, B_1^{\alpha}\right)}{d_L^{\alpha}\left(A_2^{\alpha}, A_1^{\alpha}\right)}=\gamma>0 \tag{12}$$

4.4. Testmetszéssel dolgozó szabályinterpolációs módszerek

A két módszert Baranyi és munkatársa javasolták [**2**]. Az első fuzzy halmazok közötti reláció interpolációján, míg a második a szemantikus görbe és interreláció interpolációján alapul. Előnyük, hogy minden bemenetre közvetlenül értelmezhető fuzzy halmazt ad eredményként, az alkalmazásnak nincsenek korlátai és az eredmények pontosabbak az előzőekben említett módszereknél. Gyakorlati alkalmazását bonyolultsága, jelentős számításigénye nehezíti.

4.5. Módosított α-vágat alapú interpoláció

Az Y. Yam által kidolgozott módszer [12] alapgondolata az, hogy egy függvényekkel leírt alakú fuzzy halmaz definiálásához elegendő néhány jellegzetes pont vektor formájában történő megadása. Pl. a 16. ábrán a fuzzy halmaz egy egyenlő szárú háromszög, aminek megadásához három pont ($[a_{-1}, a_0, a_1]^{-1}$) szükséges, ezeket karakterisztikus pontoknak nevezzük.



16. ábra. Háromszög alakú fuzzy halmaz karakterisztikus pontjai

A módszer rövid ismertetése során a továbbiakban csak a felső éllel ($[a_0, a_1]^{-1}$) foglalkozunk, hasonló módon kezelhető az alsó él is. A pontokra két indexxel hivatkozunk, jelölése: a_{ij}. Az első (i) a szabály sorszáma, példánkban ez 1 vagy 2 lehet, a második az első index által meghatározott fuzzy halmaz karakterisztikus pontjának sorszáma, példánkban ez 0 vagy 1 lehet. Így a megfigyelést közrefogó két legközelebbi szabály közül a bal oldalinak a feltétel részét leíró vektor a következő: $\underline{a}_1=[a_{10}, a_{11}]^{-1}$. Hasonló módon írjuk le a következmény rész fuzzy halmazait is, pl. az első szabály esetén $\underline{b}_1=[b_{10}, b_{11}]^{-1}$.

Az abnormális következtetés lehetőségének kizárása érdekében az x megfigyeléshez tartozó következmény interpolálása során egy koordináta transzformációt hajtanak végre. Ez biztosítja a nemnegatív eredményt és azt, hogy a következtetés koordinátái monoton növekedjenek.

A következmény fuzzy halmazt szintén háromszög alakzattal közelítve, a felső élt leíró vektort a következő képletek adják:

$$\underline{y} = \underline{y}' \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} \tag{13}$$

ahol

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\underline{y}' = \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\Lambda}\right) \cdot \underline{b}_1' + \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{b}_2' \tag{15}$$

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\underline{b}_1' = \left[b_{10} \cdot \sqrt{2} \quad b_{11} - b_{10}\right]^{-1} \tag{17}$$

$$\underline{b}_2' = \left[b_{20} \cdot \sqrt{2} \quad b_{21} - b_{20}\right]^{-1} \tag{18}$$

$$\underline{\Lambda} = [\lambda_0 \quad \lambda_1] \tag{19}$$

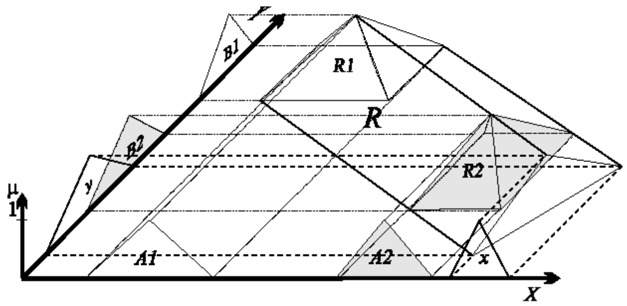
$$\lambda_0 = \frac{x_0 - a_{10}}{a_{20} - a_{10}} \tag{20}$$

$$\lambda_1 = \frac{x_1 - a_{11}}{a_{21} - a_{11}} \tag{21}$$

A módszer bonyolult alakú tagsági függvények esetén is alkalmazható. Előnyös tulajdonságai az alábbi pontokban foglalhatók össze.

- Nem nő a számítási idő az alap lineáris interpolációhoz képest.
- A konklúzió megtartja a szakaszos linearitást a karakterisztikus pontok közötti intervallumokra jó közelítéssel [**2**].
- Megőrzi a matematikai stabilitást.
- Kiküszöböli az abnormális eredményeket.

4.4. Szabályok lineáris extrapolációján alapuló fuzzy következtetés



17. ábra. Szabályok lineáris extrapolációja [1]

Extrapoláción alapuló közelítésre akkor kerül sor, ha a megfigyelés a szabályok által lefedett intervallumon kívülre esik. A megoldás hasonló az interpolációnál megismertekhez. Itt is létezik egyszerűbb, csak két szabályt felhasználó, és bonyolultabb, 2k szabályon alapuló technika, illetve a vektorreprezentációs eljárás is adaptálható. Eltérések ott jelentkeznek, hogy a távolságokat extrapolációnál előjelesen vizsgáljuk, illetve a felhasznált 2k darab szabály esetén nem kell teljesüljön az interpolációnál megkövetelt szeparációs feltétel. Az eljárás előnye, hogy a rendszer képessé válik minden bemenő adat esetén a következtetésre. Ennek természetesen ára is van, hiszen feltételezi, hogy a helyes fuzzy leképezés a felhasznált szabályok által definiált intervallumon kívül is megőrzi viselkedését. Minél távolabb kerülünk a szabályoktól, annál durvább lesz a közelítés.

4.5. Fuzzy szabályok lineáris regressziójára épülő fuzzy következtetés

A szabálybázis elemeinek forrása legtöbbször az emberi szakértőktől történő ismeretszerzés, ezért könnyen előfordulhat, főleg több szakértővel történő munka esetén, hogy nincs teljes összhang a szabályok között. Ilyenkor a hiányzó szabályok közelítésének megfelelő eszköze lehet egy olyan modell, amelynél nem követelik meg teljesen a létező szabályokra történő tökéletes illeszkedést, mint interpoláció vagy extrapoláció esetén, hanem egy olyan görbe vagy hipersík előállítására tesznek kísérletet, ami a lehető legjobban közelíti a felhasználni kívánt határpontokat [5][6]. Ennek legegyszerűbb megvalósítása a lineáris regresszióra épülő fuzzy következtetés. Ebben az esetben az előállított modell pontosságát a felhasznált szabályok száma és ezeknek a megfigyeléstől mért távolsága határozza meg.

A [6] által ajánlott módszerben egy ún. mozgó ablakot definiálnak, és csak a megfigyelés – távolságmértékkel vagy szabályszámmal - megadott környezetében levő szabályokat használják fel. A modell folytonosságát az ablak fuzzy jellegével biztosítják. Az egyes pontok az ablakban elfoglalt helyüknek megfelelő súlytényezővel (tagsági függvény értéke) vesznek részt a regressziós számításokban. A közelítő modell attól válik folytonossá, hogy az egyes szabályoknak megfelelő pontok fokozatosan, mind nagyobb súllyal jelennek meg a számításokban.

5. Összefoglalás

Az ismertetett fuzzy következtetési módszerek a rendelkezésre álló szabálybázis teljessége szempontjából lettek két csoportba sorolva. Sűrű szabálybázis esetén egyszerűsége és intuitív volta következtében a szakirodalmi adatok alapján a hagyományos, Mamdani féle kompozíciós technikát alkalmazzák a leggyakrabban, de a Sugeno által javasolt megoldással is gyakran találkozhatunk.

Nem lefedő szabálybázis esetén a módszerválasztás első döntése annak függvénye, hogy meglevő szabályok közé akarunk egy újat illeszteni vagy a megfigyeléshez kapcsolódó fuzzy halmaznak csak egyik oldalán vannak szabállyal lefedett nyelvi értékek. Előbbi esetben interpoláció, míg utóbbiban extrapoláció a megoldás. Mindkettőnél a Yam által publikált vektorreprezentációs eljárás tűnik a legalkalmasabbnak.

6. Felhasznált irodalom

[1] Kovács Szilveszter: Fuzzy logikai irányítás, Budapest, 1993.

[2] Kóczy T. László és Tikk Domonkos: Fuzzy rendszerek, Typotex Kiadó, 2000, ISBN 963-9132-55-1

[3] Michael Negnevitsky: Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems, Addison Wesley, Pearson Education Limited, 2002, ISBN 0201-71159-1

[4] Sántáné Tóth Edit: Tudásalapú technológia, szakértő rendszerek, Miskolci Egyetem Dunaújvárosi Főiskolai Kar, Dunaújváros, 2000.

[5] Kóczy T. László: Techniques of inference in insufficient and inconsistent fuzzy rule base, 14^{th} Linz Seminar on Fuzzy Set Theory: Non-Classical Logics and their Applications, pp. 46-50, Linz, 1992.

[6] Kóczy T. László: Inference in fuzzy rule bases with conflicting evidence, Proceedings of NAFIPS Conference, NASA Conference Publication 10112, Vol. II., pp. 608-614.

[7] Fuzzy Logic Toolbox For Use with MATLAB. User's Giude. Version 2, The MathWorks, Inc., Natick, 2002.

[8] Wen-Hoar Hsiao, Shyi-Ming Chen, chia-Hoang Lee: A new interpolative reasoning method in sparse rule-based systems,Fuzzy Sets and Systems 93 (1998), pp. 17-22.

[9] Dubois, D. – Prade, H.: Gradual rules in approximative reasoning, Information Science, 61 (1992), pp. 103-122.
[10] Vass Gy, Kalmár L., Kóczy L. T.: Extension of the fuzzy rule interpolation method, Proceedings of the International Conference on Fuzzy Sets Theory and its Applications, 1992.
[11] Yan, S., Mizumoto, M., Wu Zhi Qiao: Reasoning conditions on Koczy's interpolative reasoning method in sparse fuzzy rule bases, Fuzzy Sets and Systems 75 (1995) 63-71.
[12] Yam, Y, Kóczy, L. T.: Representing membership functions as points in high dimensional spaces for fuzzy interpolation and extrapolation. Technical Report CUHK-MAE-97-03, Dept. of Mechanical And Automation Eng., The Chinese Univ. of Hong Kong, 1997.