

# **Fuzzy logika**

Johanyák Zsolt Csaba

oktatási segédlet

2004

## 1. Bevezeto

A nyolcvanas évek második felétől egyre szélesebb körben nyert alkalmazást egy numerikus bizonytalanság kezelési módszer, a fuzzy logika. Mosógéptől a vérnyomásméren át a fényképezőgépig hétköznapi életünk sok használati cikkében lapulhat olyan vezérlés, ami a Lotfi A. Zadeh által 1965-ben bevezetett új fogalomra épülő irányítást alkalmaz.

A fuzzy megközelítés segítségével irányíthatóvá válnak olyan folyamatok, amelyek a klasszikus elméletekkel csak igen körülményesen lennének kezelhetők. Ezek általában ember által jól kézben tarthatóak, azonban matematikai modelljük vagy nem áll rendelkezésre, vagy túlságosan komplex, esetleg nagy számításigénye következtében valós idejű alkalmazásokhoz nem megfelelő.

A nyelvi értékeken és speciális halmazokon alapuló, Lotfi Zadeh által 1965-ben újtára indított fuzzy logika [22] alkalmazása a kezdeti hullámvölgyek után a nyolcvanas évek közepétől gyors léptekkel hódított teret a muszaki alkalmazások különböző területein.

## 2. Fuzzy logikai alapismeretek

A hétköznapi életben gyakran találkozunk olyan helyzettel, amikor egy fogalmat, egy tárgyat, egy értéket, stb. nem tudunk egyértelműen egyik vagy másik kategóriába besorolni. Úgy érezzük, hogy többé-kevésbé ide is, oda is tartozik. A klasszikus példa erre a személyek életkoruk alapján fiatal, középkorú és idős korcsoportba történő besorolása. Egy húszévesnél egyértelmű a helyzet, de egy 35 vagy 55 éves személy esetében már nem az.

A probléma oda vezethető vissza, hogy az emberi gondolkodásban nincs egyértelmű éles határvonal egyes fogalmak között. A kategóriák közötti éles határvonal meghúzása bár egyértelművé teszi a döntéshozatalt, de igen gyakran szembesülünk azzal az érzéssel, hogy nem vagyunk biztosak döntésünk helyességében. Egy dolgozat pontszámának értékelése során sokszor nincs lényegi különbség aközött, amit a határvonal alatti utolsó vagy a határvonal feletti első pontszámmal minősítenek.

Egy kategóriába történő besorolást gyakran követ egy következő lépés, ami valamilyen szabály alkalmazásával az értékelés tárgyát képező személy vagy bármely más objektum jövőjét hosszabb vagy rövidebb távon befolyásolja. Például korosztály alapján egy film megtekinthetőségének megállapítása, egy vizsgajegy vagy akár egy alkalmassági vizsga kimenetelének meghatározása.

A fenti, első látásra nehezen kezelhetőnek tűnő helyzetek, azaz a nyelvi fogalmakban rejlő bizonytalanság (pontatlanság) kezelésére teremtette meg Lotfi A. Zadeh 1965-ben a fuzzy fogalmat (homályos, életlen [14]) és a rá épülő logika alapjait. Az elméleti háttér alapos kidolgozásával párhuzamosan és annak eredményeképpen a fuzzy logika széleskörű alkalmazást nyert az ipar és hétköznapi életünk sok területén (mosógép, vízmelegítő, porszívó, stb.), ahol több szempont által befolyásolt szubjektív vagy annak tünő döntések meghozatala szükséges vagy a vizsgált rendszer matematikai modelljének megalkotása és az optimális megoldás megtalálása túl bonyolult, és ezért elfogadható időn belül nem valósítható meg.

A fejezet hátralevo részében röviden áttekintjük a fuzzy logika fontosabb alapfogalmait.

### Alapfogalmak

Visszatérve a fejezet elején említett klasszikus feladathoz vezessünk be néhány olyan alapfogalmat, amelyekre a későbbiekben hivatkozunk.

**Univerzum (alaphalmaz):** a besorolás alapját képező értékek, fogalmak vagy általánosabban megfogalmazva objektumok halmaza, azaz a megfigyelések értelmezési tartománya. A személyek kor szerinti osztályozásánál 0-tól 120 évig terjedő életkor adatokat tekintjük univerzumnak. Objektumokból álló alaphalmaz a járművek típusai által alkotott univerzum.

**Nyelvi értékek:** azok a szavak, szimbólumok, amelyek egyikéhez vagy esetleg többükhöz rendeljük az univerzum értéket, ezek a besorolás kategóriái. Korcsoportos példánkban a fiatal, középkorú, öreg szavakat tekintjük nyelvi értéknek, míg a járművek esetén megkülönböztethetünk lassú, gyors, stb. kategóriákat.

**Nyelvi változó:** egy összefoglaló fogalom, amelynek segítségével hivatkozunk az adott univerzum, adott témakörben értelmezett nyelvi értékeire. Így módon nyelvi változó a korosztály és a sebesség.

**Tagsági függvény:** egy leképezés, aminek segítségével kifejezhető, hogy a vizsgált univerzum-elem a besorolást végző személy véleménye szerint milyen mértékben tartozik

egy nyelvi értékhez. Ez egyebek között lehetőséget teremt arra, hogy amikor egy alaphalmaz-elem két vagy több nyelvi értékhez is hozzárendelhető, akkor különbséget tudjunk tenni az odatartozás mértékében. Például egy 38 éves személy sokkal inkább besorolható a középkorúakhoz, mint a fiatalokhoz, egy kerékpár inkább a lassú, mint a gyors csoportba sorolható. A leképezés értékkészlete általában a  $[0,1]$  intervallum. Jelölése:

$$\mu_A: U \rightarrow [0,1], \text{ ahol}$$

A-az aktuális nyelvi érték,

U-az univerzum.

A leképezés megadása történhet pontonként és analitikus függvények segítségével. Az első változatra akkor kerül sor, amikor az univerzum diszkrét elemekből álló halmaz (például a járművek esetében) vagy a megadott pontok között a függvény értéke lineárisan változik. Függvények segítségével történő tagsági függvény megadás a folytonos univerzumokra jellemző.

**Fuzzy halmaz:** egy speciális halmaz, amelynek minden eleme egy univerzum érték és egy hozzá rendelt tagsági függvény érték párosa. A fentiek alapján kijelenthető, hogy minden nyelvi értékhez egy fuzzy halmaz tartozik.

Diszkrét univerzum esetén a fuzzy halmazt is diszkrétnek nevezik, és azt az alábbi jelöléssel írják le:

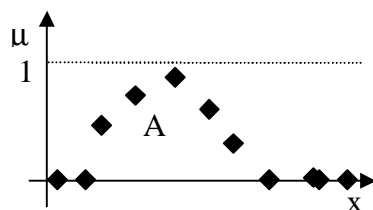
$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \mu_3/x_3 + \dots + \mu_n/x_n = \sum \mu_i/x_i \quad (1)$$

ahol  $x_i$  egy univerzum érték és  $\mu_i$  a hozzá rendelt tagsági függvény érték. A fentiekben a fuzzy halmazt összes elemének megadásával írtuk le. A „/” és a „+” jeleket nem a hagyományos értelemben kell értelmezni. A „/” a fuzzy halmaz egy elemét képező tagsági függvény-univerzum érték páros összekapcsolását szolgálja, míg a „+” elválasztó elemként szolgál a halmaz elemek felsorolásában. Ha az életkor adatok csak egész számokat jelölhetnek, a „fiatal” fuzzy halmaz az alábbi lesz:

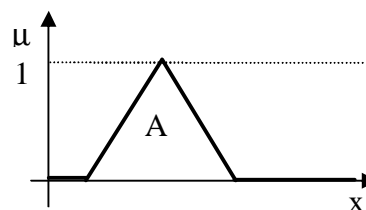
$$\text{fiatal} = 1/0 + 1/1 + 1/2 + \dots + 1/20 + 0,95/21 + \dots + 0,5/30 + \dots + 0,1/50 + \dots + 0/119 + 0/120$$

Folytonos univerzum esetén folytonos fuzzy halmazról beszélünk. Az alábbiakban ismertetésre kerülő jelölés a diszkrét esettel analóg módon értelmezhető (2).

$$A = \int_x \mu(x)/x \quad (2)$$



1. ábra. Diszkrét fuzzy halmaz

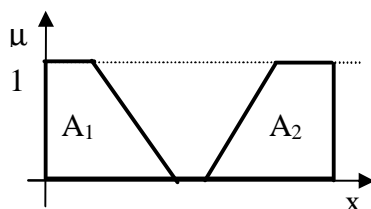


2. ábra folytonos fuzzy halmaz

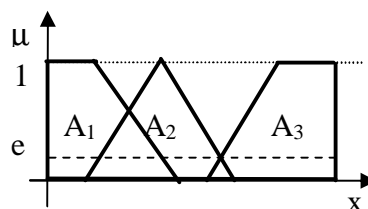
A fuzzy halmazok megjelenítésének közkedvelt, és az ember számára könnyebben áttekinthető, értelmezhető formája a grafikus ábrázolás. Az 1. ábrán egy diszkrét, a 2. ábrán egy folytonos fuzzy halmazt láthatunk. A vízszintes tengelyen az univerzum értékek, míg a függőlegesen a tagsági függvény értékek követhetők figyelemmel.

**Crisp halmaz:** a matematikából jól ismert „hagyományos” halmaz.

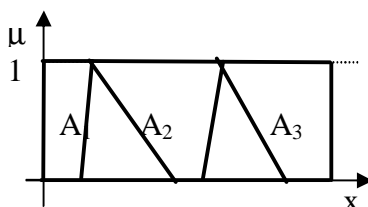
**Partíció:** az univerzum egy nyelvi változó szerint értelmezett felosztása. Minosítése során azt vizsgálják, hogy az alaphalmaz minden értéke besorolható-e legalább egy fuzzy halmazba nullától eltérő tagsági függvény értékkel. Amennyiben nem teljesül ez az elvárás, akkor **nem fedonek** (3. ábra) nevezik a partíciót. Ha minden elem 1-es értékkel hozzárendelhető legalább egy nyelvi értékhez, akkor a partíció minosítése **1-fedo** (5. ábra). Minden más esetben a partíciót **e-fedonek** (4. ábra) tekintik, ahol  $e$  az a tagsági függvény érték, amivel legalább egy fuzzy halmazban részt vesz bármely univerzum érték.



3. ábra. Nem fedo partíció

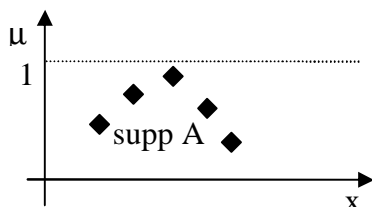


4. ábra. e-fedo partíció

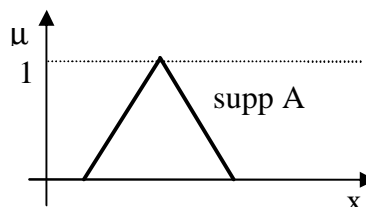


5. ábra. 1-fedo partíció

**Hordozó(tartó).** Egy fuzzy halmaz hordozója egy olyan fuzzy halmaz, amit úgy nyerünk, hogy, az eredeti fuzzy halmazból csak azokat az elemeket vesszük át, amelyeknél a tagsági függvény értéke nullánál nagyobb.



6. ábra. Diszkrét fuzzy halmaz



7. ábra folytonos fuzzy halmaz

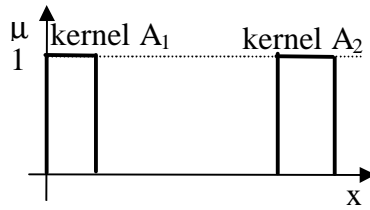
Az 6. és a 7. ábra az 1. és 2. ábrák fuzzy halmazainak hordozóit ábrázolják. Diszkrét esetben első pillantásra is jól látható, hogy eltűntek a  $\mu=0$  értékkel bíró pontok, míg folytonos esetben arra kell odafigyelni, hogy eltűntek a vastag vonalak az x tengelyen a középponttól a háromszög bal oldali száráig és a jobb oldali szárától kezdődően. Képlettel kifejezve:

$$\text{supp } A = \{x / m_A(x) \mid x \in X, m_A(x) > 0\} \quad (3)$$

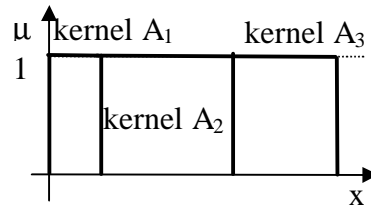
**Mag.** Egy fuzzy halmaz magja egy olyan fuzzy halmaz, amit úgy nyerünk, hogy, az eredeti fuzzy halmazból csak azokat az elemeket vesszük át, amelyeknél a tagsági függvény értéke 1. Képlettel kifejezve:

$$\text{kernel } A = \{x / m_A(x) \mid x \in X, m_A(x) = 1\} \quad (4)$$

Az 1. ábrán megadott halmaz magja egy üres halmaz, a 2. ábra halmazáé pedig egyetlen pont. A 8. és a 9. ábra a 3. és az 5. ábra halmazainak magjait ábrázolja.



8. ábra. Nem fedo partíció



9. ábra. e-fedo partíció

**Magasság.** Egy fuzzy halmaz magassága a halmaz elemeinél előforduló legnagyobb tagsági függvény érték. Képlettel kifejezve:

$$\text{height } A = \max(\mathbf{m}_A(x)) \quad (5)$$

A fenti példákban egyedül az 1. ábra halmazánál kisebb egyenél ez az érték.

**a-vágat:** egy crisp halmaz, az alaphalmaz egy részhalmaza, amit úgy kapunk, hogy az univerzumból csak azokat az elemeket vesszük át, amelyeknek tagsági függvénye legalább a értéku (6).

$$A_a = \{x \in X \mid \mathbf{m}(x) \geq a\} \quad (6)$$

**Eros a-vágat.** Egy a-vágatot akkor tekintünk erosnek, ha nem tartalmazza azon alaphalmaz-elemeket, amelyek tagsági függvénye egyenlo a-val (7).

$$A_a^- = \{x \in X \mid \mathbf{m}(x) > a\} \quad (7)$$

**Szinthalmaz:** egy olyan crisp halmaz, ami tartalmazza az eredeti fuzzy halmaz összes tagsági értékét. Folytonos univerzumú fuzzy halmaz szinthalmaza végtelen számú elemmel rendelkezik (8).

$$\Lambda_A = \{a \mid a = \mathbf{m}_A(x), x \in X\} \quad (8)$$

**Muveletek fuzzy halmazokkal.** A klasszikus halmazoknál bevezetett három alapmuvelet a komplementképzés, a metszet és az unió fuzzy halmazok esetén is értelmezhető, sőt több fajta változata is létezik. Ismertetésükre a 4. fejezetben kerül sor.

**Fuzzifikálás:** során egy konkrét mért, megfigyelt vagy bármilyen más forrásból rendelkezésre álló értékről a tagsági függvény segítségével meghatározzuk, hogy milyen mértékben tartozik egy adott fuzzy halmazba. Nem fuzzy bemenő értékkel dolgozó fuzzy rendszerek működésének ez az első lépése.

**Defuzzifikálás:** során az olyan rendszereknél, ahol a következtetés fuzzy halmazokat eredményez, minden kimenő változó esetén az előállított fuzzy halmazt egyetlen (általában racionális) értékűvé alakítják. Az alkalmazható módszerek a 7. fejezetben kerülnek ismertetésre.

**Következtetés.** A bemenő adatok alapján kimenő adatok előállítása a szabályok alkalmazásával. Részletes ismertetés a 6. fejezetben.

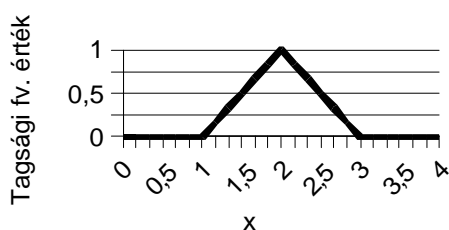
### 3. A tagsági függvény alakja és típusa

A fejezet célja az, hogy támpontot szolgáltatson a fuzzy logikán alapuló rendszerek fejlesztése során a tagsági függvények típusának és alakjának kiválasztásához folytonos alaphalmaz esetén. Az első rész áttekintést nyújt a gyakran alkalmazott, analitikusan jól leírható parametrikus függvényekről, a második rész javaslatokat fogalmaz meg a kiválasztás és az alkalmazás viszonylatában.

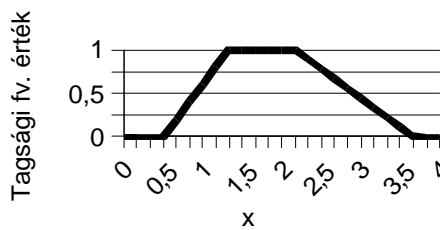
#### 3.1. Gyakran alkalmazott tagsági függvény típusok

A fuzzy tagsági függvény egy leképezést valósít meg a vizsgált terület alaphalmazbeli (univerzumbeli) értékei és a  $[0,1]$  intervallum között. Általánosítva az értékészlet egy olyan, legalább részben rendezett halmaz is lehet [8], amelyre értelmezett a metszet és az unió művelet. A tagsági függvény ( $\mu$ ) feladata annak kifejezése, hogy az univerzum-elem milyen mértékben tartozik egy nyelvi értékkel leírt csoportba. Elvileg bármely, a fenti leírásnak megfelelő függvény használható, ha az általa előállított értékek illeszkednek a konkrét feladathoz.

A továbbiakban ismertetésre kerülő parametrikus függvénytípusok kiválasztásánál szerepet játszott az, hogy irodalmi források [12][10][5][13][3][23] alapján gyakran nyernek alkalmazást önállóan vagy összetett függvény alkotó részeként. A legegyszerűbb és leggyorsabban számítható görbék a háromszög (1) és a trapéz (2), ezek egyenes szakaszokból épülnek fel (1. és 2. ábra).



1. ábra. Háromszögfüggvény  $a=1$ ;  $b=2$  és  $c=3$  paraméterekkel

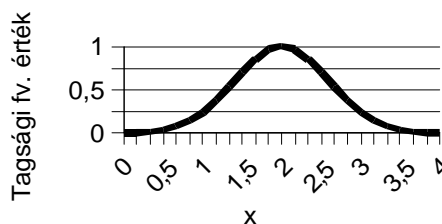


2. ábra. Trapéz függvény  $a=0,5$ ;  $b=1,33$ ;  $c=2,17$  és  $d=3,67$  paraméterekkel

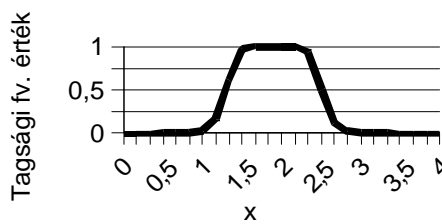
$$m_{\text{háromszög}}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (1)$$

$$m_{\text{trapéz}}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \quad (2)$$

Az „a”, „b”, „c” és „d” paraméterek az alaphalmaz azon értékei, amelyeknél a függvény törésponttal rendelkezik.



3. ábra. Gauss függvény  $s=0,6$  és  $m=2$  paraméterekkel



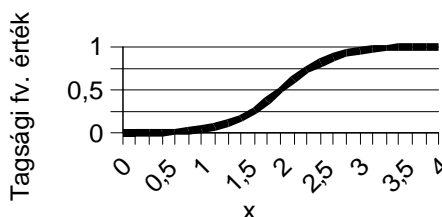
4. ábra. Általánosított haranggörbe  $a=0,6$ ;  $b=1,9$  és  $c=4$  paraméterekkel

Töréspont elkerülését igénylo feladatokhoz a leggyakrabban alkalmazott megoldások (3. és 4. ábra) a Gauss-görbe (3) és az általánosított haranggörbe (4).

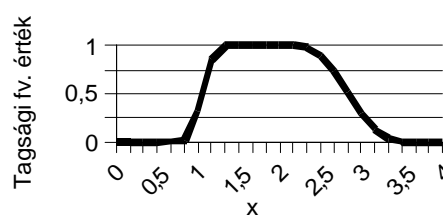
$$m_{Gauss}(x; s, m) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} \quad (3)$$

$$m_{\text{ált.harang}}(x; a, b) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-b}{a} \right|^{2c}} \quad (4)$$

Jobb- vagy baloldalon nyílt sima fuzzy halmaz (5. ábra) megvalósítható szigmoiddal (5) és szplájn alapú görbék segítségével (6.-8. ábra) is.



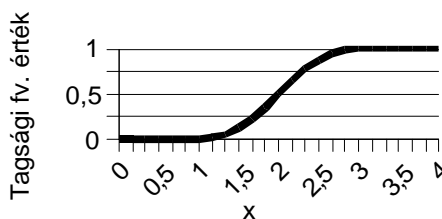
5. ábra. Szigmoid függvény  $a=3$  és  $b=2$  paraméterekkel



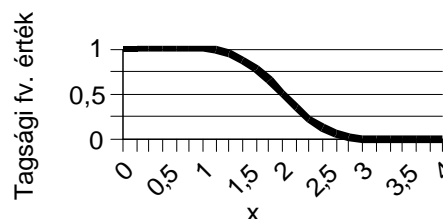
6. ábra. ? függvény  $a=0,8$ ;  $b=1,3$ ;  $c=2,2$  és  $c=3,5$  paraméterekkel

$$m_{szigmoid}(x; a, b) = \frac{1}{1 + e^{a(x-b)}} \quad (5)$$

Jellegzetes szplájn alapú típusok az S (7. ábra) és tükörképe a Z (8. ábra) valamint a ? (6. ábra). Elnevezésüket alakjukról kapták.

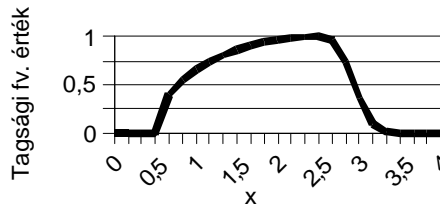


7. ábra. S függvény  $a=1$  és  $b=3$  paraméterekkel

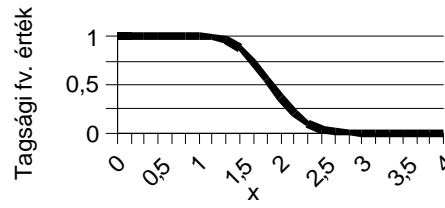


8. ábra. Z függvény  $a=1$  és  $b=3$  paraméterekkel





9. ábra. L-R függvény  $a=2$ ,  $\beta=0,5$  és  $c=2,5$  paraméterekkel



10. ábra. L-R függvény  $a=15$ ,  $\beta=1$  és  $c=1$  paraméterekkel

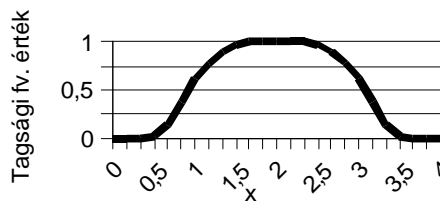
Aszimmetrikus, két részből összetett görbét (9. és 10. ábra) valósít meg az L-R függvény (6)(7)(8) [9].

$$m_{LR}(x; a, b, c) = \begin{cases} F_L\left(\frac{c-x}{a}\right) & x < c \\ F_R\left(\frac{x-c}{b}\right) & x \geq c \end{cases} \quad (6)$$

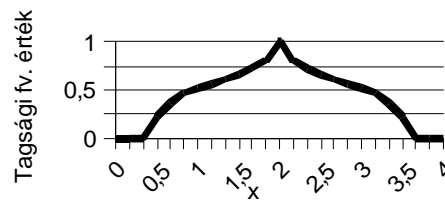
$$F_L(y) = \sqrt{\max(0, 1 - y^2)} \quad (7)$$

$$F_R(y) = e^{-|y|^3} \quad (8)$$

Az Ali és Zhang által kidolgozott [11] T függvény (9) segítségével a fuzzy halmaz alakok széles skálája valósítható meg (11. és 12. ábra).



11. ábra. T függvény  $S_L=0,4$ ;  $a=0,9$ ;  $b=1,7$ ;  $c=2,3$ ;  $d=3,1$   $S_U=3,6$  és  $e=2$  paraméterekkel



12. ábra. T függvény  $S_L=0,4$ ;  $a=0,9$ ;  $b=2$ ;  $c=2$ ;  $d=3,1$   $S_U=3,6$  és  $e=0,5$  paraméterekkel

$$m_T(x; S_L, a, b, c, d, S_U, e) = \begin{cases} 0, & x < S_L \vee x > S_U \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-S_L}{a-S_L}\right)^e, & x \in [S_L, a] \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^e, & x \in [a, b] \\ 1, & x \in [b, c] \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-c}{d-c}\right)^e, & x \in [c, d] \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S_U-x}{S_U-d}\right)^e, & x \in [d, S_U] \end{cases} \quad (9)$$

Az  $S_L$  és  $S_U$  a fuzzy halmaz tartójának alsó és felső határa, az „a” és a „d” a 0,5-ös vágatot definiálják, míg „b”-vel és „c”-vel a mag határozható meg. A hetedik paraméter a görbületeket befolyásolja.

## 3.2. A tagsági függvények jellemzőinek meghatározása

### 3.1. Nyelvi változók és nyelvi értékek

A fuzzifikálás elokészítésének első lépése a nyelvi változók beazonosítása és elkülönülő értékek megadása, ami legtöbbször az alkalmazással lefedni kívánt tárgyterület szakértőinek véleményére, tapasztalataira támaszkodva történik a mesterséges intelligencia klasszikus ismeretszerzési és -feldolgozási módszereivel. Szakértő hiányában megoldást nyújthat egy közelítő rendszermodell felállítása, például adatbányászatból származó eredményekre támaszkodva.

A nyelvi változókhoz tartozó nyelvi értékek számának meghatározása során általában három és tíz közötti értékekkel találkozhatunk [17][12][1]. Tíznel többet a tapasztalatok szerint egy átlagember nem tud megkülönböztetni a legtöbb témakörben, míg háromnál kevesebbet választva a rendszer használhatósága válik kérdésessé. Páratlan szám választása mellett szól az az érv, hogy általa könnyen kijelölhetővé válik egy, a szélső értékektől közel azonos távolságra lévő középső szint.

Egyes feladatoknál szükség lehet arra, hogy az alaphalmaz bizonyos tartományaiban a felosztás surubb legyen, más szóval a nyelvi értékek között legyenek olyanok, amelyek „közelebb” vannak szomszédaihoz. Ily módon ezen univerzum-intervallumokban érzékenyebb következtetés valósítható meg.

A nyelvi értékek számának meghatározásánál figyelembe kell venni azt is, hogy suru szabályhalmaz iránti igény esetén a felosztás növelésével arányosan nő az igényelt szabályok száma. Például egy két-bemenetű ( $A$  és  $B$ ) és három ( $A=\{A_1, A_2, A_3\}$ ) illetve négy ( $B=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ ) nyelvi értékkel rendelkező rendszernél a suru szabálybázis kialakításához  $3 \times 4 = 12$  szabály szükséges. Az első nyelvi változó értékeit megduplázva az igényelt szabályok száma is megkétszereződik, ami a fejlesztéssel kapcsolatos ráfordításokra is hatással van. A szabályszám növelésének azonban előnyös következményei is vannak. A nyelvi értékek számának növelésével finomabbá válik a fuzzy felosztás, és növekszik ennek fedési mértéke. A nagyfokú redundancia eredményeképpen a tagsági függvények behangolásának kisebb pontatlanságai nem okoznak jelentős hibát a kimeneten.

A fuzzifikálás elokészítésének következő lépéseként neveket rendelünk a nyelvi értékekhez, pl. a kor nyelvi változóhoz az újszülött, csecseme, kisgyerek, gyerek, tinédzser, fiatal, középkorú, idős, stb. értékeket társíthatjuk. Minden nyelvi érték egy fuzzy halmazt képvisel.

### 3.2. Fuzzy halmaztípusok kiválasztása

A nyelvi változók és értékek kiválasztása után számba vesszük az egyes nyelvi értékekhez kapcsolt fuzzy halmazok leírására használható tagsági függvény típusokat. Alakjukat jelentős mértékben befolyásolja, hogy a következtetési folyamat során vagy végén szükséges-e a defuzzifikálás. Eltérő lehet a választott típus egy fuzzy irányítás és egy más célú fuzzy következtetésen alapuló rendszer (klasszterező, osztályozó, szakértői rendszer, stb.) esetén. A továbbiakban megvizsgáljuk e két lehetőséget.

### 3.2.1. Defuzzifikálást igénylo rendszerek

Az irányítás területén és általában ott, ahol defuzzifikálásra kerül sor, alapvetően két úton lehet elindulni. Az univerzumbeli érték és a fuzzy halmaz között lineárisnak feltételezve a kapcsolatot leggyakrabban a háromszög és a trapéz alakú függvénytípusokkal találkozunk. A feladat azonban gyakran megköveteli a lineáristól eltérő kapcsolatot, amit olyan háromszöggel közelítenek, amelynek nem egyenlők a szárjai, vagy valamely nem lineáris görbével írják le pontosan.

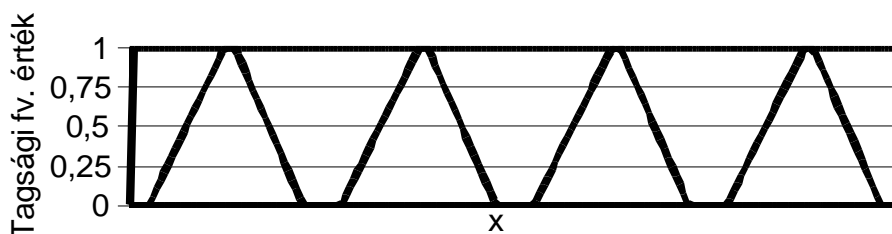
A háromszög függvény előnye, hogy könnyen számítható a súlypontja és a területe, ami által csökkenthető a defuzzifikálás időigénye, valamint a hozzá tartozó szabály csak egy jól behatárolt univerzum intervallumban aktivizálódik, ellentétben például az általánosított haranggörbével vagy a Gauss függvényvel, amelyeknél a kapcsolódó szabály, igaz kis mértékben, de mindig hatást gyakorol az eredményre. A Gauss- és az általánosított haranggörbével csak szimmetrikus tagságérték függvény képezhető. Aszimmetrikus és zárt sima vonal képezhető két szigmoid függvényből vagy egy szplájnalapú görbe segítségével. Az L-R függvény paramétereinek megfelelő megválasztásával sima és törésponttal rendelkező fuzzy halmazok széles skálája képezhető.

Egyes feladatoknál hátrányos lehet, ha a fuzzy halmaz csak egy pontban éri el csúcserőértékét, azaz a hozzá kapcsolódó szabály csak egyetlen univerzum-pontban vesz részt maximális súllyal a döntési folyamatban. Ennek kiküszöbölésére a trapéz vagy általában a sima tetejű alak használata ajánlott.

Defuzzifikálást tartalmazó rendszereknél követelményként jelentkezhet az, hogy a fuzziifikálási és a defuzziifikálási műveletek egymás inverzei legyenek. Ez azt jelenti, hogy ha egy skaláris (crisp) értéket fuzziifikálunk, majd rögtön utána defuzziifikálást hajtunk végre, akkor a kiinduló numerikus értéket kapjuk vissza. Ezen elvárás kielégítéséhez a felosztás finomítása is hozzájárul. Az inverzitási követelménynek is nevezett elvárás elsődleges szuroként szolgálhat a tagsági függvénytípus és a későbbi defuzziifikálási módszer kiválasztásánál.

### 3.2.2. Defuzziifikálást nem tartalmazó rendszerek

Azon alkalmazásoknál, ahol a kimenet vagy a következtetési folyamatban keletkező köztes fuzzy halmaz kategória jellegű, azaz nincs szükség defuzziifikálásra, ott a sima tetejű függvényalakok váltak be a legjobban [17]. A függvénygörbéket ilyenkor úgy alakítják, hogy az univerzum minden elemére létezzon olyan fuzzy halmaz, amelynek teljes mértékben tagja az adott elem. Ennek eredményeképpen az 1-es szinten egy folytonos vízszintes vonal jelenik meg a diagramon (11. ábra).



11. ábra. Robusztusságot biztosító felosztás

A keletkező fuzzy particionálást 1-fedonek is nevezik. Ez megfelelő mértékű redundanciát eredményez, és erősíti a következtetési rendszer robusztusságát.

### 3.2.3. Általános szempontok

Valós idejű alkalmazásoknál a rendszer gyors reagálása érdekében a számítási idő döntő szempont a tagsági függvény alakjának kiválasztásánál. Ilyen esetekben gyakran alkalmaznak háromszög és trapéz alakot vagy szakaszonként lineáris fuzzy halmazt [11].

A kiválasztott függvény formájának kialakítása során először megpróbáljuk behatárolni azon értékeket vagy szakaszokat, amelyeknél biztosnak tekintjük az 1-es tagsági szintet. Ezután következik azon univerzumrészek beazonosítása, amelyekről egyértelműen kijelenthetjük, hogy nem részei az adott fuzzy halmaznak. A függvénygörbe első becsléseként kössük össze egyenes vonalakkal a kulcspontokat (intervallumok széleit). Ennek eredményeképpen háromszög vagy trapéz alakzatokat kapunk. Szabályozó rendszerekben ez általában tökéletesen elegendő, de más esetekben, pl. klaszterezőknel a szélsőértékek közötti lineáris közelítésnél legtöbbször jobb eredményre vezet valamilyen s-alakú (pl. négyzetes) függvény. Amennyiben egy halmaznál szélesebb hordozóra lenne igény, Gauss görbével próbálkozunk. Ilyenkor a paraméterek kiválasztása úgy történik, hogy a haranggörbe az első közelítésben megadott egyenest a 0,5-ös tagsági értéknél metsze.

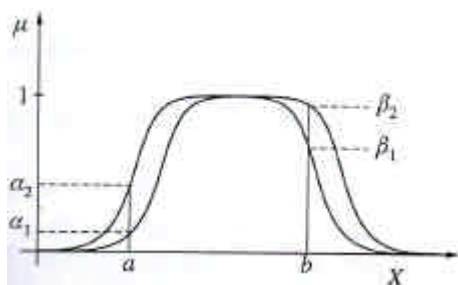
Szomszédos nyelvi értékek esetén a tapasztalatok szerint [10] különösen kompozíciós következtetésnél ajánlott, hogy 0,5-ös tagsági értéknél metsszék egymást a szomszédos fuzzy halmazok. Ez könnyen biztosítható egy olyan felosztással, ahol a soron következő nyelvi érték tagsági szintje ugyanazon abszcisszánál kezd növekedni, ahol az ot megelőző fuzzy halmaz csökkenni kezd, és ugyanazon alaphalmaz értéknél végződik mindkét átmeneti szakasza is. Képletekkel kifejezve [10]:

$$\sup\{\text{kernel}(A_{i-1})\} = \inf\{\text{supp}(A_i)\} \quad (9)$$

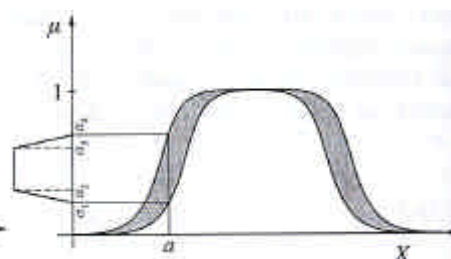
$$\sup\{\text{supp}(A_{i-1})\} = \inf\{\text{kernel}(A_i)\} \quad (10)$$

ahol  $A_{i-1}$  és  $A_i$  az  $i-1$ . és az  $i$ . fuzzy halmaz, kernel a mag, supp a hordozó, inf és sup az adott intervallum legkisebb illetve legnagyobb értékei. A háromszög függvényekkel megvalósított 0,5 fedo felbontást Ruspini partíciónak nevezik.

Amennyiben egy alaphalmaz elemeihez nem lehetséges konkrét tagsági függvény értékek meghatározása, és csak azon információ áll rendelkezésre, hogy  $(x)$  mely alsó és felső korlátok közé esik, akkor intervallum értékű fuzzy halmaz alkalmazása szükséges. A nehézkes számítások és következtetési folyamat következtében a gyakorlatban ritkán alkalmaznak intervallum értékű fuzzy halmazokat.



14. ábra. Intervallum értékű fuzzy halmaz [7]



15. ábra. Fuzzy értékű fuzzy halmaz [7]

További általánosítást tesz lehetővé a fuzzy értékű fuzzy halmaz, amelynél a pontos tagsági függvény helyett megadott intervallum maga is egy fuzzy halmaz. Ez a bizonytalansággal kapcsolatos bizonytalanság egy kifejezési eszköze, amit másodfajú

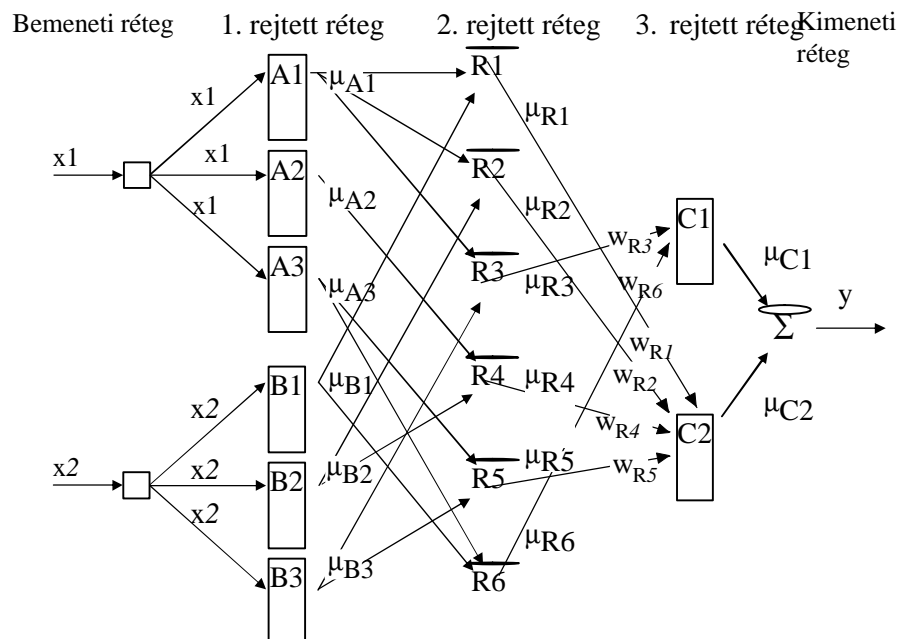
fuzzy halmaznak is neveznek. Alkalmazhatóságának a nehezen átláthatóságon kívül a megnövekedett számításigény is gátat szab. A fenti logikát követve magasabb fajú fuzzy halmazok is előállíthatók, de ezeknek csak elméleti jelentősége van.

### 3.2.4. Neuro-fuzzy rendszerek

Az optimális tagsági függvények kiválasztása megfigyelésen alapuló adatokból mesterséges neurális hálózatok segítségével is megvalósítható [2][13]. A fuzzy rendszerrel való integráltság mértéke szerint kooperatív és hibrid változatot különböztetünk meg.

Kooperatív neuro-fuzzy rendszerekben a neurális háló teljesen elkülönül a fuzzy rendszertől. Feladata a fuzzifikálás előkészítésében az, hogy egy felügyelt tanulási időszak után a bemeneti skalár adatból előállítsa az egyes nyelvi értékekhez való tartozás mértékét.

A hibrid neuro-fuzzy rendszer egy többrétegu neurális hálózat, amely általában a bemeneti és kimeneti rétegeken kívül három rejtett réteggel rendelkezik [13], és megvalósítja a fuzzifikálástól a defuzzifikálásig a teljes folyamatot. A tagsági függvényeket és szabályokat felügyelt tanulás során „sajátítja el” a rendszer.



16. ábra. Egy hibrid neuro-fuzzy rendszer [9]

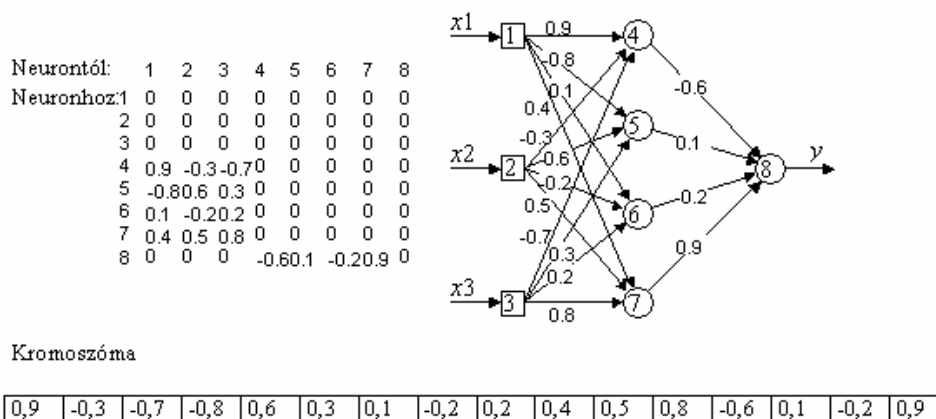
A 16. ábrán bemutatott rendszer két bemenettel és egy kimenettel rendelkezik. Az első (bemeneti) réteg a külső skalár jeleket közvetlenül továbbítja a második réteghez. Ez a fuzzifikáló réteg, kimenete kifejezi, hogy az adott crisp érték ( $x_1, x_2$ ) mennyire tartozik nyelvi változójának (A, B) nyelvi értékeihez ( $A_1, A_2, A_3$  és  $B_1, B_2, B_3$ ), azaz mekkora a tagsági értéke.

Bár a neurális háló alkalmazása megoldást kínál a fuzzy halmazok kialakításának egyes feladataira, de egyben újabb kérdéseket is felvet. A legtöbb kritika az alkalmazott „back-propagation” tanulási algoritmus miatt éri a neuro-fuzzy rendszereket, mivel ez könnyen konvergálhat a súlyok szuboptimális halmazához [13]. További kérdéseket vet fel az a tény is, hogy a szükséges feldolgozó elemek és rétegek számának, valamint az elemek közötti és a rétegek közötti kapcsolatok meghatározásának folyamata eseti és szubjektív elemeket tartalmaz [1], így sokan a neurális hálózatok topológiájának tervezését sokkal inkább művészetnek tekintik, mint mérnöki munkának [13].

### 3.2.5. Genetikus algoritmusokat alkalmazó hibrid rendszerek

A genetikus algoritmusok globális kvázioptimum megtalálására kifejlesztett problémafüggetlen keresési módszerek. A fuzziifikálás elokészítésében két módon játszhatnak szerepet.

A genetikus algoritmusok az eredetileg tisztán fuzzy (nem hibrid) rendszerekbe építve az elsodleges becsléssel megadott tagsági függvények finomhangolásában nyújthatnak segítséget.



12. ábra. Súlyszámok kódolása [13]

A genetikus algoritmusok neuro-fuzzy rendszerekben hatékonyan képesek támogatni egy neurális hálózat súlyszámainak optimalizálását és a megfelelő topológia kiválasztását. Az alkalmazás mindkét esetében az evolúció értékeléséhez mintaadatok szükségesek. Eredményes működésük kulcskérdése a tulajdonságokat leíró „génnek” (kromoszómarészletek) kialakítása.

A 12. ábra egy bemeneti, kimeneti és rejtett réteggel rendelkező mintaháló súlyszámainak kódolására mutat példát.

### 3.2.6. Paraméter-meghatározás kereséssel

Sok esetben előre ismert vagy konvencionálisan feltételezhető, hogy egy-egy feladatnál egy parametrikus görbetípus hatékonyan alkalmazható a tagság mértékének leírására. A fuzziifikálás elokészítése ilyenkor a nyelvi változók és nyelvi értékek beazonosításán túl a paraméterek optimális értékeinek meghatározására korlátozódik. A feladat keresési algoritmusok segítségével legtöbbször egyszerűen megoldható. A továbbiakban két gyakorlati példa tömör ismertetésén keresztül szeretnénk rávilágítani az alkalmazás lehetőségeire és nehézségeire.

Cheng és Chen [3] környezetfüggő tagsági értékek meghatározásához kidolgozott optimális paraméter-kereső módszerükben szimulált leütési algoritmus alkalmazását javasolták. Eljárásukat sikeresen alkalmazták szürkeárnyaltos képek világosságosságához kapcsolódó fuzzy értékének meghatározására. A környezetfüggőség ebben az esetben azt jelentette, hogy egy szürkeárnyalat tekinthető sötétnek vagy akár világosnak is attól függően, hogy a környezetében milyen pontok találhatóak. A keresés optimum-kritériumát a Zadeh [23] által definiált fuzzy esemény és a maximális entrópia elvéből kiindulva határozták meg.

Ali és Zhang [1] egy tisztán fuzzy rendszer teljes fuzzy modell optimalizálását célozták meg. A paraméterkeresés első szakaszában véletlen keresést alkalmaztak a lokális optimumba való beragadás elkerülése érdekében, majd a pontos értékek meghatározását

Hooke-Jeeves algoritmussal oldották meg. Tagsági függvénynek egy hétparaméteres összetett kifejezést választottak. Módszerüket sikeresen alkalmazták a köszörülésnél keletkező maradó feszültségek és az ausztráliai pénzügyi piac fuzzy modelljének optimalizálására. A feladat komplexitása következtében a legjobb paraméterek megtalálása masszív párhuzamos számítási architektúrán is 5 és 50 óra közötti időigénnyel járt, igaz a rendszer életciklusában erre csak egyszer volt szükség. Az optimális paraméterek megkeresése után az alkalmazás működtetéséhez egy hétköznapi PC konfiguráció is megfelelt.

## 4. Muveletek fuzzy halmazokkal

Fuzzy halmazok esetén három alapmuveletről beszélhetünk, ezek a komplementképzés, az unió és a metszet. Először definíciójukat Zadeh adta meg, a későbbiekben különböző változatainak kidolgozásával igyekeztek a gyakorlatban minél jobban alkalmazható alkalmazásokat kifejleszteni. A fuzzy logika műveletei a Boole féle logika általánosításának tekinthetők, így a 0 és 1 szélsőértékekre a Boole féle logikával azonos eredményeket szolgáltatnak.

Az alábbiakban áttekintjük az általánosított operátorokat, majd ezek gyakorlati megvalósításaként a Zadeh által javasolt eredeti változatokat és néhány ismertebb alternatívát vizsgálunk meg.

### 4.1. Komplementképzés

#### 4.1.1. Komplementképzés általánosan

A komplement egy függvény, aminek minden értéke egy olyan fuzzy halmazhoz való tartozás mértékét fejezi ki, amit az eredeti halmaz (nyelvi érték) negáltjának tekintünk. Ha például A az idős emberek fuzzy halmaza, akkor komplemente azon személyek sokasága, akiket nem tekintünk idősnek. Fuzzy halmazokról lévén szó a klasszikus halmazoktól eltérően az esetek többségében sok olyan elemet találhatunk, amelyek úgy az A, mint annak komplementjében ( $\bar{A}$ ) nullánál nagyobb tagsági értékkel bírnak. A komplement jelölése:

$$c : [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (4.1)$$

Egy értelmezett művelet akkor felel meg a komplementképzés céljára, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

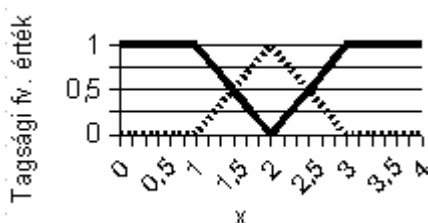
1.  $c(0)=1$  és  $c(1)=0$
2. monoton csökkenés: ha  $b < a$ , akkor  $c(b) > c(a)$

#### 4.1.2. Komplementképző függvények

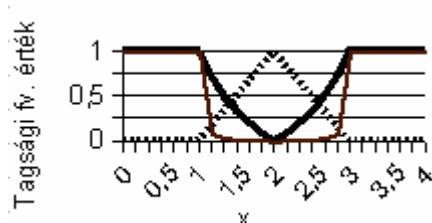
##### Zadeh féle komplement

$$c(m_A(x)) = m_{\bar{A}}(x) = 1 - m_A(x) \quad (4.2)$$

A 4.1. ábrán szaggatott vonallal szerepel egy háromszög alakú fuzzy halmaz, míg vastag vonallal jelölve láthatjuk komplementjét.



4.1. ábra. Zadeh féle komplement



4.2. ábra. Sugeno féle komplement

##### Sugeno komplementek osztálya [7]

$$c_I(m_A(x)) = \frac{1 - m_A(x)}{1 + I \cdot m_A(x)} \quad (4.3)$$



ahol  $I > -1$ .

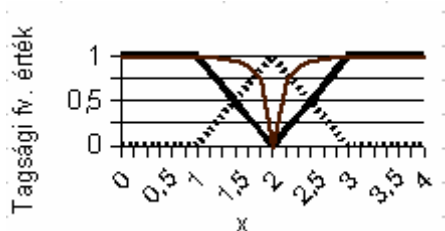
A 4.2. ábrán szaggatott vonallal szerepel egy háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk Sugeno komplementjét vastag vonallal  $\lambda=1$  értékre és vékony vonallal  $\lambda=50$  értékre.

### Yager féle komplementek [7]

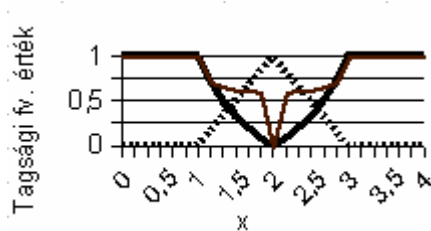
$$c_w(m_A(x)) = \sqrt[w]{1 - (m_A(x))^w} \quad (4.4)$$

ahol  $w > 0$ .

A 4.3. ábrán szaggatott vonallal szerepel egy háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk Yager komplementjét vastag vonallal  $\omega=1$  értékre és vékony vonallal  $\omega=3$  értékre.



4.3. ábra. Yager féle komplementek



4.4. ábra. Összevont Sugeno-Yager komplementek

### Összevont Sugeno-Yager komplementek

$$c_{I,w}(m_A(x)) = \sqrt[w]{\frac{1 - (m_A(x))^w}{1 + I \cdot m_A(x)}} \quad (4.5)$$

A 4.4. ábrán szaggatott vonallal szerepel egy háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk összevont Sugeno-Yager komplementjét vastag vonallal  $\omega=1, \lambda=1$  értékre és vékony vonallal  $\omega=10, \lambda=200$  értékre.

## 4.2. Metszet

### 4.2.1. Metszetképzés általánosan

Két fuzzy halmaz metszetét megvalósító műveletet t-normának (t=triangular=háromszög) nevezzük. Jelölése:

$$t : [0,1]^2 \rightarrow [0,1] \quad (4.6)$$

Egy fuzzy halmazokon értelmezett kétoperandusú művelet akkor nevezhető metszetnek, ha megfelel az alábbi feltételeknek [7]:

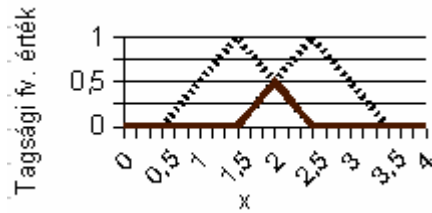
1.  $t(a,1)=a$
2. monotonitás: ha  $b=c$ , akkor  $t(a,b) = t(a,c)$
3. kommutativitás:  $t(a,b)=t(b,a)$
4. asszociativitás:  $t(a,t(b,c))=t(t(a,b),c)$

### 4.2.2. Metszetképző operátorok

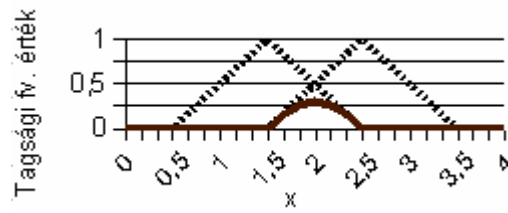
Zadeh féle metszet [22]

$$t(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cap B}(x) = \min(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) \quad (4.7)$$

A 4.5. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk Zadeh féle metszetüket.



4.5. ábra. Zadeh féle metszet



4.6. ábra. Schweizer és Sklar féle metszet

### Schweitzer és Sklar féle metszet [7]

$$t_S(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cap B}^S(x) = \sqrt[p]{\max(0, (\mathbf{m}_A(x))^p + (\mathbf{m}_B(x))^p - 1)} \quad (4.8)$$

ahol  $p \neq 0$ .

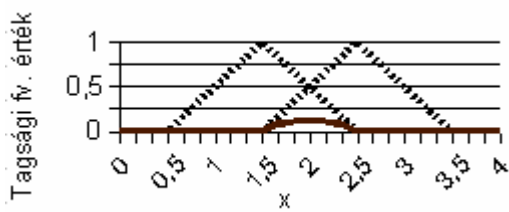
A 4.6. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk Schweizer és Sklar féle metszetét  $p=-0,5$ -ös paraméter érték mellett.

### Hamacher féle metszet [7]

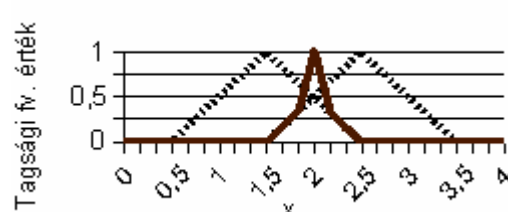
$$t_H(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cap B}^H(x) = \frac{\mathbf{m}_A(x) \cdot \mathbf{m}_B(x)}{r + (1-r) \cdot (\mathbf{m}_A(x) + \mathbf{m}_B(x) - \mathbf{m}_A(x) \cdot \mathbf{m}_B(x))} \quad (4.9)$$

ahol  $r > 0$ .

A 4.7. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk a Hamacher féle metszetet  $r=5$ -ös paraméter érték mellett.



4.7. ábra. Hamacher féle metszet



4.8. ábra. Yager féle metszet

### Yager féle metszet

$$t_Y(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cap B}^Y(x) = 1 - \min\left(1, \sqrt[w]{(1 - \mathbf{m}_A(x))^w + (1 - \mathbf{m}_B(x))^w}\right) \quad (4.10)$$

ahol  $w > 0$ .

A 4.8. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk a Yager féle metszetet  $w=1500$  paraméter érték mellett.

### 4.3. Unió

#### 4.3.1. Unióképzés általánosan

Két fuzzy halmaz unióját megvalósító műveletet s-normának (t-konormának) nevezzük. Jelölése:

$$s : [0,1]^2 \rightarrow [0,1] \quad (4.11)$$

Egy fuzzy halmazokon értelmezett kétoperandusú művelet akkor nevezhető uniónak, ha megfelel az alábbi feltételeknek [7]:

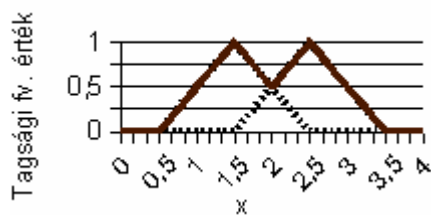
1.  $t(a,0)=a$
2. monotonitás: ha  $b=c$ , akkor  $t(a,b) = t(a,c)$
3. kommutativitás:  $t(a,b)=t(b,a)$
4. asszociativitás:  $t(a,t(b,c))=t(t(a,b),c)$

#### 4.2.2. Unióképző operátorok

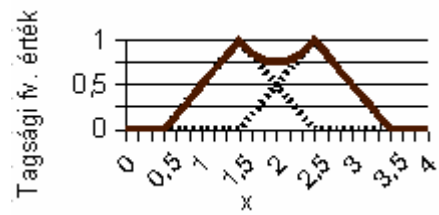
**Zadeh féle unió** [22]

$$s(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cup B}(x) = \max(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) \quad (4.12)$$

A 4.9. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk Zadeh féle uniójukat.



4.9. ábra. Zadeh féle unió



4.10. ábra. Algebrai unió

**Algebrai unió** [7]

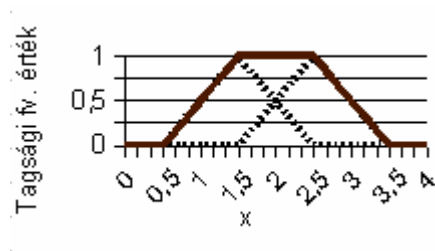
$$s_{Alg}(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cup B}^{Alg}(x) = \mathbf{m}_A(x) + \mathbf{m}_B(x) - \mathbf{m}_A(x) \cdot \mathbf{m}_B(x) \quad (4.13)$$

A 4.10. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk algebrai uniójukat.

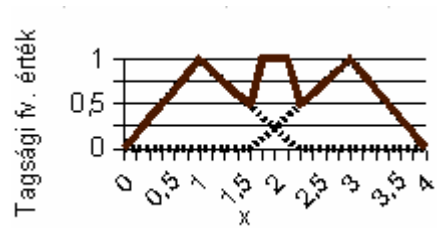
**Korlátos unió** [7]

$$s_{Korl}(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cup B}^{Korl}(x) = \min(1, \mathbf{m}_A(x) + \mathbf{m}_B(x)) \quad (4.14)$$

A 4.11. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk korlátos uniójukat.



4.11. ábra. Korlátos unió



4.12. ábra. Drasztikus unió

**Drasztikus unió [7]**

$$s_D(\mathbf{m}_A(x), \mathbf{m}_B(x)) = \mathbf{m}_{A \cup B}^D(x) = \begin{cases} \mathbf{m}_A(x) & \text{ha } \mathbf{m}_B(x) = 0 \\ \mathbf{m}_B(x) & \text{ha } \mathbf{m}_A(x) = 0 \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (4.15)$$

A 4.12. ábrán szaggatott vonallal szerepel két háromszög alakú fuzzy halmaz, míg folytonos vonallal jelölve láthatjuk drasztikus uniójukat.

## 5. Relációk

### 5.1. Hagyományos relációk

A klasszikus reláció információt ad arról, hogy egy vagy több halmaz elemei között fennáll-e egy adott kapcsolat. Ennek leírása úgy történik, hogy képzik a részt vevo halmazok Descartes-i szorzatát, azaz pl. kéthalmazos esetben párosítanak minden elemet a másik halmaz minden elemével, és a párosokhoz egyenként 1-et vagy 0-t rendelnek aszerint, hogy fennáll-e vagy nem a vizsgált kapcsolat. Kéthalmazos esetben a relációt binárisnak nevezik.

Egy kéthalmazos bináris reláció példaként vegyük a programozási nyelvek egy részhalmazát:

$Pr = \{C++, C\#, Prolog, Pascal\}$

és egy felsőoktatási intézményben indított szakok halmazát:

$Sz = \{\text{muszaki informatika, gépész, menedzser}\}$

és a reláció fejezze ki azt, hogy részesülnek-e az adott szakon az adott nyelvi képzésben a hallgatók. A reláció megadásának a legegyszerűbb formája ebben az esetben az 5.1. táblázat.

5.1. táblázat

Nyelvek \ Szakok	muszaki informatika	gépész	menedzser
C++	1	0	0
C#	1	0	0
Prolog	1	0	0
Pascal	0	1	1

A relációban részt vevo halmazok nem feltétlenül különböznek, egyetlen halmaz elemei között is értelmezhetünk relációt, pl. tekintsük az emberek egy csoportját, mint halmazt, és köztük értelmezett reláció legyen a házasság.

### 5.2. Fuzzy relációk

A fuzzy reláció alapvetően a klasszikus reláció kiterjesztése. Itt lehetőség van a kapcsolat kevésbé élesen elhatároló értékelésére, a vizsgált két vagy több objektum viszonyát az adott témakörben egy szélesebb skálán, általában a  $[0,1]$  intervallum értékeivel minosíthatjuk. A bináris fuzzy reláció általános jelölése:

$$R = \{((x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2\} \quad (5.1)$$

ahol az  $(x_1, x_2)$  objektum párosok az  $A_1$  és az  $A_2$  halmazok Descartes-i szorzataként keletkeztek, a  $\mu_R(x_1, x_2) \in [0,1]$  a kapcsolat intenzitását értékelő mérőszám. Példaként vegyük a programozási nyelvek már korábban is használt részhalmazát:

$Pr = \{C++, C\#, Prolog, Pascal\}$

és hallgatók egy csoportját (halmazát):

$Sz = \{\text{Elvira, Gerzson, Lujza}\}$

és a reláció a nyelv ismeretének szintjét fejezze ki. A reláció megadásának a legegyszerűbb és legáttekinthetőbb formája ebben az esetben az 5.2. táblázat.

5.2. táblázat

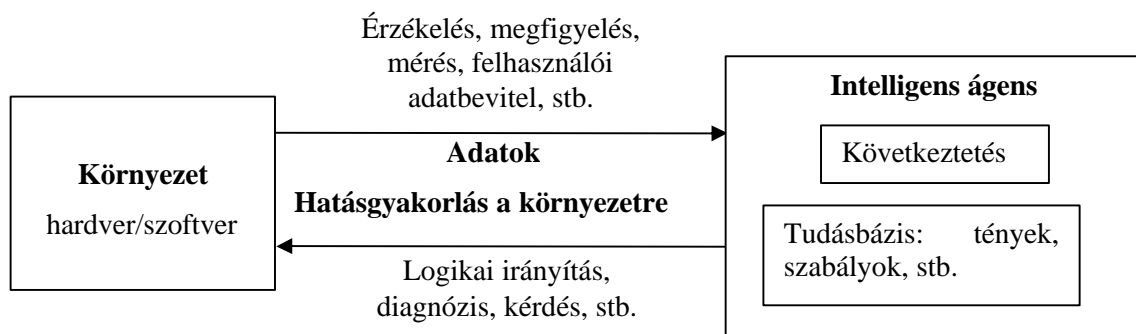
Személyek \ Nyelvek	Elvira	Gerzson	Lujza
C++	1	0,5	0
C#	1	0,7	0,9
Prolog	0	0,2	0
Pascal	0	0,1	1

A relációk fontos tulajdonsága, hogy jól alkalmazhatók HA ... AKKOR ... típusú szabályok leírására.

## 6. Fuzzy következtetési módszerek

### 6.1. Mi a következtetés?

Tegyük fel, hogy van egy intelligens ágensünk, ami valamilyen szinten érzékeli környezetét, azaz valamilyen adatot (információt) kap annak állapotáról (megfigyelés, mérés, felhasználói input, stb.), és ezek alapján valamilyen kimenetet állít elő (vezérlo utasítás, diagnózis, tanács, stb.), azaz hatást gyakorol környezetére. Következtetésnek



6.1. ábra. Következtetés

nevezzük azt a folyamatot, amelynek során a bemenet és a rendelkezésre álló ismeretanyag alapján létrejön a kimenet.

### 6.2. Következtetés fuzzy rendszerekben

Egy fuzzy rendszer esetén a rendelkezésre álló ismeretanyag, azaz az ágens tudásbázisa egy szabályrendszer formájában áll rendelkezésre. A be- és kimenő adatok crisp vagy fuzzy jellegétől függően a következtetési folyamat végrehajtása előtt és után fuzzifikálásra és defuzzifikálásra is szükség lehet.

A fuzzy következtetés menete hasonlít az előre láncoló (adatvezérelt) szabályalapú rendszerekhez. Az első eltérés ott jelentkezik, hogy egy végrehajtási cikluson belül több szabály feltétel része kiértékelésre kerül párhuzamos módon. Ennek feltétele az, hogy a tagsági függvény értéke nullánál nagyobb legyen az adott feltételre. A következtetés eredményeképpen a Sugeno féle módszer kivételével egy fuzzy halmaz keletkezik.

### 6.3. Suru (lefedo) szabálybázisra épülő módszerek

Egy szabálybázist akkor tekintenek lefedőnek, ha minden lehetséges megfigyelés kombináció esetén rendelkezésre áll legalább egy aktivizálható szabály, aminek feltételei nullától eltérő tagsági függvény értékkel teljesülnek. Egy fuzzy logikai irányítás csak akkor tekinthető megbízhatóan működőképesnek, ha közvetlen vagy közvetett úton teljesül a fenti elvárás, azaz, ha esetlen nem is lefedő a szabálybázis, de a hiányzó szabályok becsléssel pótolhatók. A továbbiakban suru szabálybázis esetére az alábbi módszereket tekintjük át:

- Kompozíciós fuzzy következtetés
- Kompakt fuzzy következtetés
- Sugeno féle fuzzy következtetés
- Döntési mátrixon alapuló fuzzy következtetés

### 6.3.1. Kompozíciós fuzzy következtetés

A kompozíciós fuzzy következtetés alapötletét Lotfi A. Zadeh definiálta 1973-ban. 1975-ben Ebrahim Mamdani kis mértékben átdolgozta, így ez a módszer ma Mamdani nevét viseli. Gondolatmenete egyszerű és könnyen áttekinthető. Az alapelv az, hogy minél jobban illeszkedik egy megfigyelés egy szabály feltétel részére (minél nagyobb a tagsági függvény érték), az adott szabály következmény része annál nagyobb súllyal vesz részt az eredményként előálló fuzzy halmazban.

A következtetés eredményeként keletkező fuzzy halmazt a bemenő adatok fuzzy halmaza és a szabálybázist leíró fuzzy reláció kompozíciójaként állítják elő. A következményt előállító képletek  $n$  dimenziós megfigyelés esetére az alábbiak:

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \circ \mathbf{R} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \mu_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \circ \mathbf{R}}(y) &= \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \min[ \mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \dots, \mu_{x_n}(x_n), \mu_{\mathbf{R}}(x, y) ] = \\ &= \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \min[ \mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \dots, \mu_{x_n}(x_n), \\ &\quad \bigcup_{i=1}^r \mu_{R_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, y) ] = \\ &= \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \min[ \mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \dots, \mu_{x_n}(x_n), \\ &\quad \bigcup_{i=1}^r \min( \mu_{A_{1,i}}(x_1), \mu_{A_{2,i}}(x_2), \dots, \mu_{A_{n,i}}(x_n), \mu_{B_i}(y) ) ] = \\ &= \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \bigcup_{i=1}^r \min[ \mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \dots, \mu_{x_n}(x_n), \\ &\quad \mu_{A_{1,i}}(x_1), \mu_{A_{2,i}}(x_2), \dots, \mu_{A_{n,i}}(x_n), \mu_{B_i}(y) ) ] = \\ &= \bigcup_{i=1}^r \max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \min[ \mu_{x_1}(x_1), \mu_{x_2}(x_2), \dots, \mu_{x_n}(x_n), \\ &\quad \mu_{A_{1,i}}(x_1), \mu_{A_{2,i}}(x_2), \dots, \mu_{A_{n,i}}(x_n), \mu_{B_i}(y) ) ] = \\ &= \bigcup_{i=1}^r \mu_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \circ R_i}(y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

ahol

$X$  a megfigyelés univerzum

$Y$  a következtetés univerzum

$x_i \in X$  a megfigyelés fuzzy halmaza az  $i$ . dimenzióban

$y \in Y$  a következtetés fuzzy halmaza

$R$  a szabálybázis reláció

$\mu$  tagsági függvény

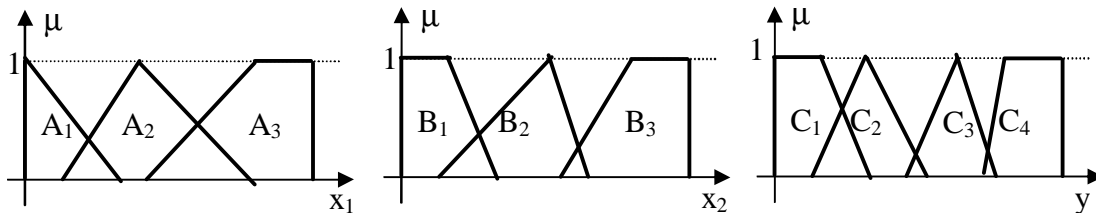
Az alkalmazott halmazműveletek után ezt a következtetési módot max-min kompozíciónak is nevezik. Használatát tekintsük át egy egyszerű példán keresztül. Tegyük fel, hogy a megfigyelés kétdimenziós ( $x_1$  és  $x_2$ ), az első érték ( $x_1$ ) univerzumának partíciója három halmazból (nyelvi értékből) áll, ezek  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$ . Továbbá a második érték ( $x_2$ ) univerzumának partíciója szintén három halmazból áll, amelyek a  $B_1$ ,  $B_2$  és  $B_3$  azonosítókkal rendelkeznek. A következmény univerzum négy nyelvi értéket tartalmaz ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  és  $C_4$ ). A megfigyelés és következmény univerzumok partícióit a 6.2. ábra tartalmazza. A tudásbázis az alábbi szabályokat tartalmazza:



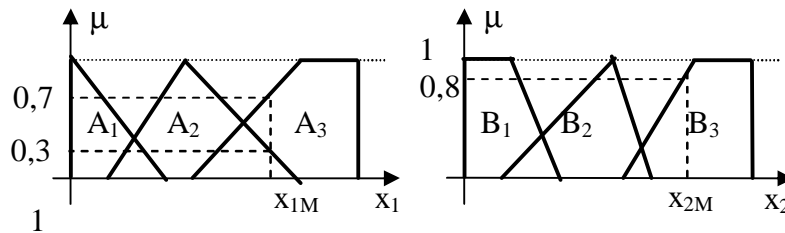
**HA**  $x_1$  az  $A_2$ -be tartozik **ÉS**  $x_2$  a  $B_3$ -ba tartozik **AKKOR**  $y$  a  $C_3$ -ba tartozik

**HA**  $x_1$  az  $A_3$ -ba tartozik **ÉS**  $x_2$  a  $B_3$ -ba tartozik **AKKOR**  $y$  a  $C_2$ -be tartozik

...

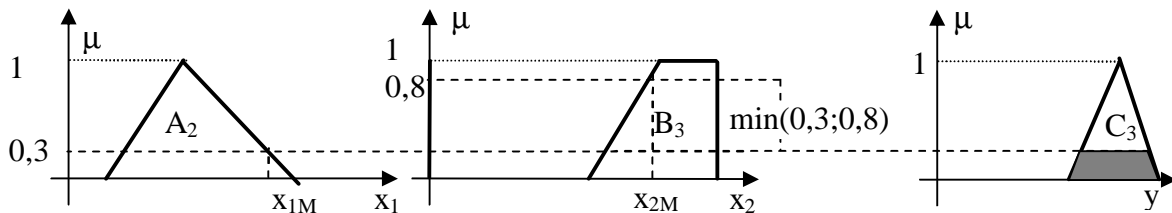


6.2. ábra. A megfigyelés és következmény univerzumok partíciói

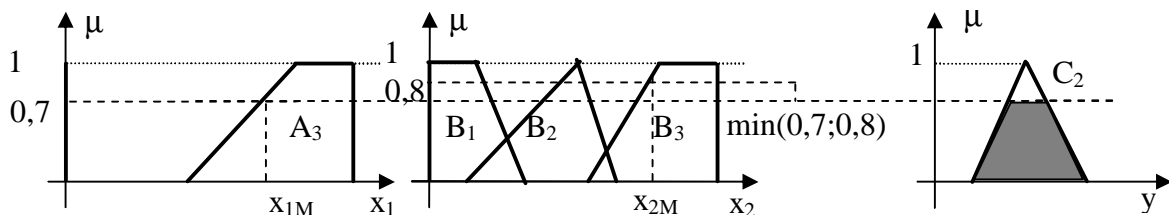


6.3. ábra. Megfigyelés

Rendszerünk egy konkrét megfigyelés eredményeként kap egy  $x_{1M}$  és egy  $x_{2M}$  értéket, melyekre illeszthető az első két szabály, mivel  $x_{1M}$  a második és a harmadik nyelvi értéknél is nullától különböző tagsági függvény értékkel rendelkezik, és  $x_{2M}$  a  $B_3$  fuzzy halmazba sorolható nullánál nagyobb értékkel (6.3. ábra).



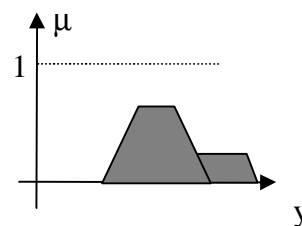
6.4. ábra. Az első szabály kiértékelése



6.5. ábra. A második szabály kiértékelése

Sorra vesszük a tüzelésre alkalmas szabályokat. Ha az aktuális szabály feltételrészre több nyelvi érték **ÉS** kapcsolatából tevődik össze, akkor vesszük ezek tagsági függvény értékeit, és kikeressük közülük a legkisebbet. **VAGY** kapcsolatnál viszont a legnagyobb tagsági értékkel megyünk tovább.

A szabály következmény részében szereplo nyelvi érték tagsági függvény grafikonján húzunk egy vízszintes vonalat az elobb meghatározott értéknél, és egy területet képzünk, amelyet a vízszintes tengely, a fuzzy halmaz hordozója és az elobbiekben definiált szintvonal határol. Mindkét szabályra eloállítjuk egy ilyen területet (6.4. és 6.5. ábra), majd ezek unióját képezzük (6.6. ábra). Ez lesz a következtetés eredményeként eloálló fuzzy halmaz.



6.6. ábra. A következtetés

eredménye

A módszer elonyös tulajdonsága intuitív volta és könnyu megvalósíthatósága.

### 6.3.2. Kompakt fuzzy következtetés

A kompakt fuzzy következtetés a kompozíciós következtetés módosított változata. Itt a következtetés eredménye egy reláció, ami a megfigyelés által kapott fuzzy halmaz valamint a szabálybázist leíró reláció metszeteként keletkezik, és az alábbi képletekkel írható le [10]:

$$R_C = [x \downarrow (Y - X)] \cap R \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} m_{R_C}(x, y) &= \min [m_x(x), m_R(x, y)] \\ &= \min [m_x(x), \bigcup_{i=1}^r m_{R_i}(x, y)] \\ &= \min [m_x(x), \bigcup_{i=1}^r \min (m_{A_i}(x), m_{B_i}(y))] \end{aligned} \quad (6.4)$$

ahol

$R_C$  a következtetés reláció

Az elozo módszerhez hasonlítva az eltérés ott jelentkezik, hogy míg kompozíciós technika esetén az eredményt a következtetés reláció következtetés univerzumra vett vetülete határozza meg, addig a kompakt esetben az eredményt a következtetés reláció térbeli súlypontjának következtetés univerzumra vett vetülete adja.

Gyakorlati szempontból az eltérés az érzékenységben mutatkozik. A kompakt módszer következtetés relációjában erosebb szereppel bír a megfigyelés és a feltétel halmazok hasonlósága, így ez a módszer érzékenyebb, mint a kompozíciós társa.

A kompakt módszer elonyös tulajdonsága, hogy alkalmazása esetén a következtetés jobban hasonlít a domináns szabály következmény részéhez. Hátránya viszont, hogy algoritmusának komplexitása és így számításigénye jelentosen meghaladja a kompozíciós módszerét.

### 6.3.3. Sugeno féle fuzzy következtetés

A Michio Sugeno által javasolt következtetési mód részben hasonló a Mamdani féle módszerhez. Az elso eltérés a szabályok következmény részében jelentkezik, ahol nem fuzzy halmaz szerepel, hanem a következmény a feltételek matematikai függvényeként van megadva az alábbi mintához hasonlóan [13]:

**HA**  $x_1$  az  $A_2$ -be tartozik **ÉS**  $x_2$  a  $B_1$ -be tartozik **AKKOR**  $y=f(x_1, x_2)$ ,

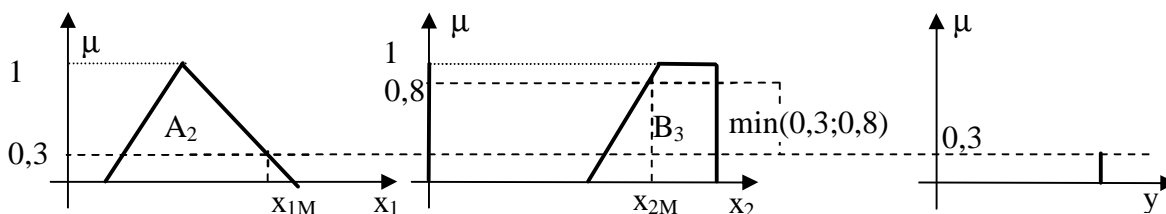
ahol  $f(x_1, x_2)$  a következményt megadó függvény.

Legyen egy kétdimenziós megfigyeléssel dolgozó és a 6.3.1. pontban alkalmazott partícióval rendelkezo rendszer, valamint az alábbi két szabály.

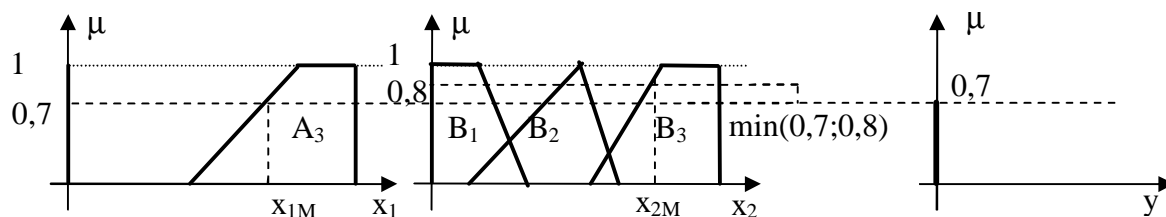
**HA**  $x_1$  az  $A_2$ -be tartozik **ÉS**  $x_2$  a  $B_3$ -ba tartozik **AKKOR**  $y = x_1 + x_2 + 1$

**HA**  $x_1$  az  $A_3$ -ba tartozik **ÉS**  $x_2$  a  $B_3$ -ba tartozik **AKKOR**  $y = x_1 - x_2 + 1$

A következtetés kompozíciós jellegű. Több szabály aktivizálódása (tüzelése) esetén az eredményt az egyes szabályoknál számolt következmények súlyozott átlagaként határozzák meg [5]. A súlyszámokat ugyanazzal a módszerrel határozzák meg, mint a kompozíciós módszernél a következmény tagsági függvény területhatároló egyenesét. A következtetés eredményeképp egy valós érték keletkezik, így nincs szükség defuzzifikálásra. Példánkban a megfigyelés az  $x_{1M}=6$  és az  $x_{2M}=7$  értékeket tartalmazza. Az első szabály kiértékelése után az  $y=14$  eredmény keletkezik, amihez a 0,3-as tagsági függvény érték tartozik (6.7. ábra).



6.7. ábra. Az első szabály kiértékelése



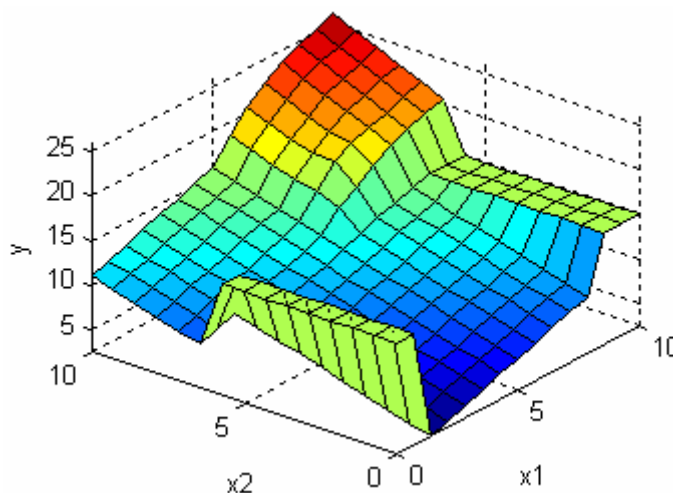
6.8. ábra. A második szabály kiértékelése

A második szabály kiértékelése után az  $y=0$  eredmény keletkezik, amihez a 0,7-es tagsági függvény érték tartozik (6.8. ábra). A rendszer kimenetén jelentkező súlyozott átlag:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{14 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,7}{0,3 + 0,7} = 14 \quad (6.5)$$

A rendszer működését 6.9. ábrán látható válaszfelület segítségével jellemezhetjük. A Sugeno típusú fuzzy modellre épülő gyakorlati alkalmazások zöme „nulladrendű”, ami azt jelenti, hogy a szabályok következményében szereplő függvények konstans értékűek, mivel a magasabb rendű függvények jelentősen nagyobb számításigénnyel járnak.

A Sugeno módszer elnyös tulajdonságának tekinthető [5], hogy a jól működik lineáris technikákkal (PID vezérlok), biztosított a kimeneti felület folytonossága, jól alkalmazható matematikai elemzéshez, a kompozíciósnál kisebb



számításigény, és nem igényel defuzzifikálást.

### 6.3.4. Keresotáblán (look-up table) alapuló fuzzy következtetés

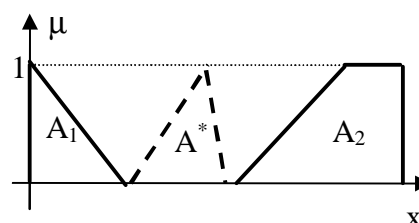
A keresotáblán vagy más néven, döntési mátrixon alapuló következtetés nem egy önálló módszer, csupán egy eszköz, amivel fuzzy következtetésen alapuló rendszerünk működését jelentős mértékben meggyorsíthatjuk. Alkalmazásának előfeltétele, hogy úgy a megfigyelési oldalon, mint az eredmény oldalon a fuzzy halmazok lehetséges értékeit tartalmazó univerzumok diszkrétnek legyenek, és a felvehető értékek száma kisebb legyen az alkalmazható tárolási technika által meghatározott korlátoknál.

A módszer alap gondolata az, hogy minden lehetséges bemenő értékre egy kiválasztott következtetési módszerrel (pl. Mamdani vagy Sugeno típusúval) előre kiszámítják az eredményt, és azt egy táblázatban tárolják. A használat során csupán egy keresési műveletre kerül sor. A módszer előnye a gyorsaság, hátránya a nagy tároló kapacitás iránti igény.

A comp.ai.fuzzy hírcsoport archívuma alapján a rendszer „belövése”, a szabályok finomhangolása után, a gyakorlati alkalmazásokban eloszeretettel választják ezt a megoldást.

### 6.4. Ritka (nem lefedő) szabálybázisra épülő módszerek

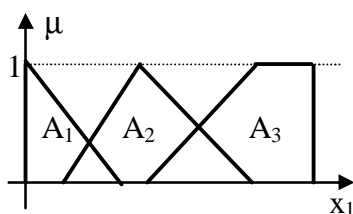
Ritkának nevezzük a szabálybázist, ha nem rendelkezünk szabállyal az összes lehetséges megfigyelés kombinációra. Ez azt jelenti, hogy egyes megfigyelt értékeknél, semmilyen szabályt nem tud aktivizálni a rendszer (6.10. ábra), így a kimenő oldalon nem keletkezik következtetés.



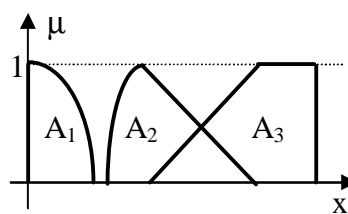
6.10. ábra. Az  $A^*$  nyelvi érték nem szerepel egyetlen szabály feltétel részében sem

Hogyan keletkezik ritka szabálybázis?

- A szakértőtől vagy más forrásból (pl. neurális hálózat alapú tanulási technika) beszerzett információ alapján generált szabályok nem fednek le minden lehetséges megfigyelés értéket. Például a 6.10. ábra szerinti partíciót feltételezve egy egydimenziós megfigyelés univerzumon a szabályrendszer csak olyan elemeket tartalmaz,



6.11. ábra. Partíció hangolás előtt



6.12. ábra. Partíció hangolás után

amelyeknek feltétel részében az  $A_1$  vagy az  $A_2$  fuzzy halmazok szerepelnek.

- A hangolás során a fuzzy halmazok alakjának módosulása következtében ezek között „lyukak” keletkeznek (6.11. és 6.12. ábra).

- A nyelvi változók száma olyan nagy, hogy még, ha elo is tudnák állítani az összes lehetséges szabályt, akkor se volna lehetséges az adott hardver feltételek között tárolni azokat. Például  $n=3$  dimenziós megfigyelés és dimenzióként  $k=5$  nyelvi érték esetén feltételezve, hogy a szabályok feltételrészében ezek között csak ÉS kapcsolat van, és minden dimenzió megjelenik mindegyik szabály feltétel részében, a szükséges szabályok száma:  $k^n=125$ . Ha az elozoekben említett megkötésektol eltekintünk, a szükséges szabálysám tovább növekszik. Ezért ilyen esetekben mesterségesen teszük ritkává a szabálybázist.
- A nagy szabálysám megnöveli a következtetéshez szükséges ido nagyságát, így rontja a rendszer teljesítményét. Ebben az esetben is elképzelhető a szabálybázis mesterséges ritkítása.

A lefedettség hiányában egyes megfigyeléseknél a szabályok közelítésén alapuló módszereket kell alkalmazni a hiányzó következmények eloállítására. Fontosabb becslésén alapuló módszerek:

- Szabályok lineáris interpolációján alapuló fuzzy következtetés.
- Módosított a-vágat alapú interpoláció.
- Szabályok lineáris extrapolációján alapuló fuzzy következtetés.
- Fuzzy szabályok regressziójára épülő fuzzy következtetés.

Ezen módszerek segítségével megpróbálják betömni a hiányzó szabályok miatt keletkezett „lyukakat”, azaz vizsgálják a megfigyelés hasonlóságát a létezo szabályokhoz, és ennek alapján eloállítják a következmény becslését. A követett alapelv az, hogy minél jobban hasonlít a megfigyelés egy szabály feltételére, annál jobban hasonlítson a becsült következmény az adott szabály következményére [4]. A becslés végrehajtásának elfeltétele, hogy legalább részben értelmezhető legyen egy rendezési reláció a szabályok feltétel és következmény részében szereplo fuzzy halmazokon [7]. A feladat megoldásához eloször definiálni kell a fuzzy halmazok hasonlóságát.

#### 6.4.1. Fuzzy halmazok hasonlóságának mérése

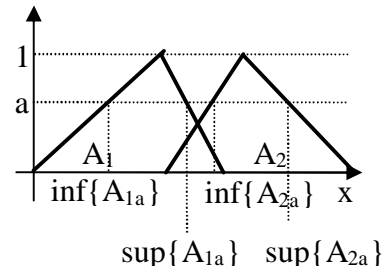
A fuzzy halmazok hasonlóságának értékelése terén alapvetően három megközelítéssel találkozunk. Ezek az alábbiak:

1. Az érintett fuzzy halmazok metszetének maximális tagsági értékével.
  - Elony: könnyen, gyorsan számítható.
  - Hátrány: nem képes kezelni azokat az eseteket, amikor az érintett két vagy több fuzzy halmaz nem metszi egymást, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk ezen megközelítéssel.
2. fuzzy halmazok távolságával.
  - Elony: minden esetben alkalmazható.
  - Hátrány: nagyobb számításigény.
3. Közép fuzzy távolsággal és a fuzzy szélességgel. Ezen hasonlóságmérési technikán alapul a Vass, Kalmár és Kóczy [18] által javasolt interpolációs eljárás, ami csökkenti a távolságalapú megközelítés alkalmazhatósági korlátait.

## 6.4.2. Fontosabb fogalmak

### 6.4.2.1. Fuzzy halmazok távolsága

Fuzzy halmazoknál a megelőzi („<”) relációt az a-vágatok segítségével értelmezzük, ha az A és B fuzzy halmazok normálisak és konvexek, akkor kijelenthetjük, hogy  $A < B$  akkor teljesül, ha  $\forall a \in (0,1]$ -re  $\inf\{A_a\} < \inf\{B_a\}$  és  $\sup\{A_a\} < \sup\{B_a\}$ . Az inf és sup a vágat által előállított intervallum alsó és felső végpontjai [7].



6.13. ábra. inf és sup értelmezése

Két fuzzy halmaz távolságát a-vágataik végpontjainak euklideszi távolságait felhasználva, két - a  $[0,1]$  intervallumon értelmezett - fuzzy halmazzal fejezzük ki. A két mennyiséget alsó ( $d_L^a$ ) és felső ( $d_U^a$ ) távolságnak nevezzük [10] és az (6.6) valamint a (6.7) képlettel számítjuk.

$$d_L^a(A_1, A_2) = \inf\{A_2^a\} - \inf\{A_1^a\} \quad (6.6)$$

$$d_U^a(A_1, A_2) = \sup\{A_2^a\} - \sup\{A_1^a\} \quad (6.7)$$

### 6.4.2.2. Közép fuzzy távolság

A fuzzy távolsághoz hasonlóan itt is a-vágatonként határozzuk meg a vizsgált fuzzy halmazok közelségét. Az elozokben használt alsó és felső távolságok helyett itt azok átlagával (6.8) dolgozunk [7].

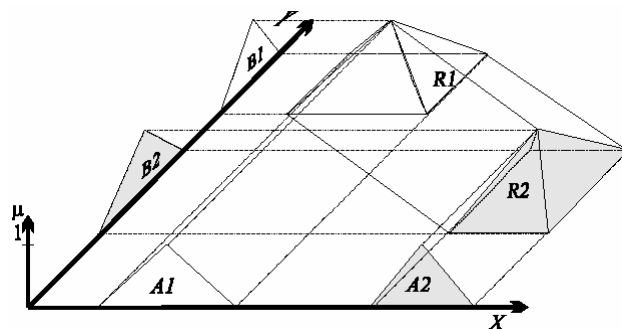
$$d_M^a(A, B) = \frac{d_L^a(A, B) + d_U^a(A, B)}{2} \quad (6.8)$$

### 6.4.2.3. Fuzzy szélesség

Egy fuzzy halmaz a-vágatainak szélességét írja le a függvényében. Minél specifikusabb egy fuzzy halmaz, annál keskenyebb. Pl.  $S_z = \{5|_{a=0}, 3|_{a=0.5}, 1|_{a=1}\}$  három a-vágatra adja meg a szélesség értékeket.

## 6.4.3. Szabályok lineáris interpolációján alapuló fuzzy következtetés

Az interpoláción alapuló szabálybecslő módszerek alkalmazásának előfeltétele, hogy találjunk legalább két olyan szabályt, ami közrefogja a megfigyelést. Távolságalapú hasonlóság méréssel dolgozva a becslt szabály meghatározásának alap gondolata az, hogy minél közelebb van az x megfigyeléshez tartozó  $A^*$  fuzzy halmaz az  $A_i$  ( $A_1, A_2, \text{ stb.}$ ) feltételhez, annál közelebb legyen a becslt y következtetéshez tartozó  $B^*$  fuzzy halmaz a  $B_i$  ( $B_1, B_2, \text{ stb.}$ ) következményhez. Ez az elvárás a Kóczy és Hirota által javasolt lineáris interpoláció [7] esetén a távolságok arányba állításával valósul meg.



6.14. ábra. Ritka szabálybázis

A 6.14. ábrán két szabályból álló szabályrendszer látható, mindkettonél a feltétel és a következmény részben csak egy nyelvi érték szerepel. A szabályrendszer ritka,  $A_1$  és  $A_2$  között jelentkező megfigyelés esetén a következtetéshez szabálybecslésre van szükség. Felállítva a távolság aránypárokat (6.9) behelyettesítve az (6.6) és (6.7) képleteket, a-vágatonként külön az alsó és felső értékekre meghatározhatjuk a következmény fuzzy halmaz alsó (6.10) és felső pontjait (6.11).

$$\frac{d_i^a(A_1, A^*)}{d_i^a(A^*, A_2)} = \frac{d_i^a(B_1, B^*)}{d_i^a(B^*, B_2)} \quad (6.9)$$

ahol  $i$  helyére U vagy L kerül, aszerint, hogy alsó vagy felső távolságról van-e szó.

$$\inf\{B^{*a}\} = \frac{d_L^a(A_1, A^*) \cdot \inf\{B_2^a\} + d_L(A^*, A_1) \cdot \inf\{B_1^a\}}{d_L^a(A_1, A^*) + d_L(A^*, A_1)} \quad (6.10)$$

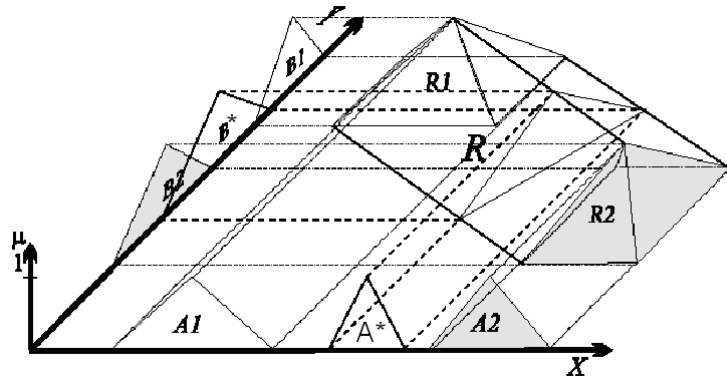
$$\sup\{B^{*a}\} = \frac{d_L^a(A_1, A^*) \cdot \sup\{B_2^a\} + d_L(A^*, A_1) \cdot \sup\{B_1^a\}}{d_L^a(A_1, A^*) + d_L(A^*, A_1)} \quad (6.11)$$

A keresett következtetés fuzzy halmaz felbontási alakban áll elő a-vágatok uniójaként [7]. A 6.15. ábrán a közelítés két szabályra épülő lineáris interpolációval történik.

Az interpolációhoz több szabályt is figyelembe vehetünk a  $2k$  szabályra épülő módszer segítségével.

Alkalmazásának feltétele, hogy a megfigyelés mindkét oldalán úgy a feltétel, mint a következmény részben rendelkezésre álljon  $k$  darab szabály. Ezt az elvárás szeparációs feltételnek nevezik.

A lineáris interpoláció hatékony működéshez a szabályok feltétel és következmény részében szereplő fuzzy halmazok



6.15. ábra. Lineáris interpoláció

formája egyszerű kell legyen, lehetőleg szakaszonként lineáris (pl. háromszög) annak érdekében, hogy néhány jellegzetes ponttal leírhatóak legyenek, így elérhető, hogy csak a lényeges a-vágatokra legyen szükséges a számítások elvégzése.

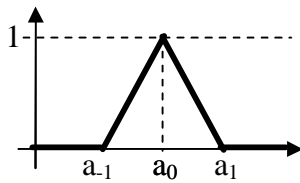
A fentiekben ismertetett lineáris interpolációs módszer előnye könnyű értelmezhetősége és megvalósíthatósága, valamint kis számítási komplexitása. Hátrányos tulajdonsága az, hogy csak a (6.12)-ben és (6.13)-ban [21][19] megfogalmazott feltételek teljesülése esetén alkalmazható, más esetekben a következmény abnormalis fuzzy halmaz megjelenéséhez vezethet.

$$\frac{d_L^a(A_1, A^*)}{d_L^a(A_1, A^*) + d_L(A^*, A_1)} = b \in [0,1] \quad (6.11)$$

$$\frac{d_L^a(B_2^a, B_1^a)}{d_L^a(A_2^a, A_1^a)} = g > 0 \quad (6.12)$$

#### 6.4.4. Módosított a-vágat alapú interpoláció

Az Y. Yam által kidolgozott módszer [20] alap gondolata az, hogy egy függvényekkel leírt alakú fuzzy halmaz definiálásához elegendő néhány jellegzetes pont vektor formájában történő megadása. Pl. a 16. ábrán a fuzzy halmaz egy egyenlő szárú háromszög, aminek



6.16. ábra. Háromszög alakú fuzzy halmaz karakterisztikus pontjai

megadásához három pont (  $[a_{-1}, a_0, a_1]^{-1}$  ) szükséges, ezeket karakterisztikus pontoknak nevezzük.

A módszer rövid ismertetése során a továbbiakban csak a felső éllal (  $[a_0, a_1]^{-1}$  ) foglalkozunk, hasonló módon kezelhető az alsó él is. A pontokra két indexsel hivatkozunk, jelölése:  $a_{ij}$ . Az első (i) a szabály sorszáma, példánkban ez 1 vagy 2 lehet, a második az első index által meghatározott fuzzy

halmaz karakterisztikus pontjának sorszáma, példánkban ez 0 vagy 1 lehet. Így a megfigyelést közrefogó két legközelebbi szabály közül a bal oldalinak a feltétel részét leíró vektor a következő:  $\underline{a}_1=[a_{10}, a_{11}]^{-1}$ . Hasonló módon írjuk le a következmény rész fuzzy halmazait is, pl. az első szabály esetén  $\underline{b}_1=[b_{10}, b_{11}]^{-1}$ .

Az abnormalis következtetés lehetőségének kizárása érdekében az  $x$  megfigyeléshez tartozó következmény interpolálása során egy koordináta transzformációt hajtunk végre. Ez biztosítja a nem negatív eredményt és azt, hogy a következtetés koordinátái monoton növekedjenek.

A következmény fuzzy halmazt szintén háromszög alakzattal közelítve, a felső élt leíró vektort a következő képletek adják:

$$\underline{y} = \underline{y}' \cdot \underline{T}^{-1} \quad (6.14)$$

ahol

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\underline{y}' = (\underline{I} - \underline{I} \cdot \underline{\Lambda}) \cdot \underline{b}'_1 + \underline{I} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{b}'_2 \quad (6.16)$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\underline{b}'_1 = [b_{10} \cdot \sqrt{2} \quad b_{11} - b_{10}]^{-1} \quad (6.18)$$

$$\underline{b}'_2 = [b_{20} \cdot \sqrt{2} \quad b_{21} - b_{20}]^{-1} \quad (6.19)$$

$$\underline{\Lambda} = [\underline{I}_0 \quad \underline{I}_1] \quad (6.20)$$

$$\underline{I}_0 = \frac{x_0 - a_{10}}{a_{20} - a_{10}} \quad (6.21)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{x_1 - a_{11}}{a_{21} - a_{11}} \quad (6.22)$$

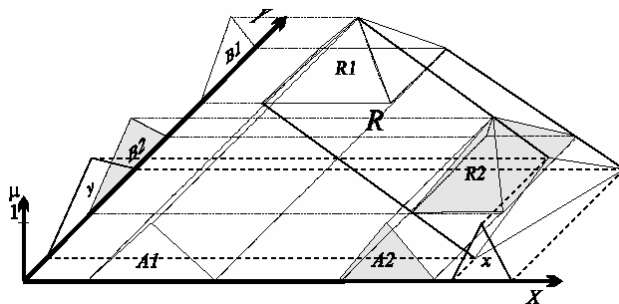


A módszer bonyolult alakú tagsági függvények esetén is alkalmazható. Elonyös tulajdonságai az alábbi pontokban foglalhatók össze.

- Nem no a számítási ido az alap lineáris interpolációhoz képest.
- A konklúzió megtartja a szakaszos linearitást a karakterisztikus pontok közötti intervallumokra jó közelítéssel [7].
- Megorzi a matematikai stabilitást.
- Kiküszöböli az abnormális eredményeket.

#### 6.4.5. Szabályok lineáris extrapolációján alapuló fuzzy következtetés

Extrapoláción alapuló közelítésre akkor kerül sor, ha a megfigyelés a szabályok által



6.17. ábra. Szabályok lineáris extrapolációja

lefedett intervallumon kívülre esik. A megoldás hasonlít az interpolációnál megismertekhez. Itt is létezik egyszerűbb, csak két szabályt felhasználó, és bonyolultabb,  $2k$  szabályon alapuló technika, illetve a vektorrepresentációs eljárás is adaptálható. Eltérések ott jelentkeznek, hogy a távolságokat extrapolációnál előjelesen vizsgáljuk, illetve a felhasznált  $2k$  darab szabály esetén nem kell teljesüljön az interpolációnál

megkövetelt szeparációs feltétel. Az eljárás előnye, hogy a rendszer képessé válik minden bemenő adat esetén a következtetésre. Ennek természetesen ára is van, hiszen feltételezi, hogy a helyes fuzzy leképezés a felhasznált szabályok által definiált intervallumon kívül is megorzi viselkedését. Minél távolabb kerülünk a szabályoktól, annál durvább lesz a közelítés.

#### 6.4.6. Fuzzy szabályok lineáris regressziójára épülő fuzzy következtetés

A szabálybázis elemeinek forrása legtöbbször az emberi szakértoktól történő ismeretszerzés, ezért könnyen elfordulhat, főleg több szakértóval történő munka esetén, hogy nincs teljes összhang a szabályok között. Ilyenkor a hiányzó szabályok közelítésének megfelelő eszköze lehet egy olyan modell, amelynél nem követelik meg teljesen a létező szabályokra történő tökéletes illeszkedést, mint interpoláció vagy extrapoláció esetén, hanem egy olyan görbe vagy hipersík előállítására tesznek kísérletet, ami a lehető legjobban közelíti a felhasználni kívánt határpontokat [9][8]. Ennek legegyszerűbb megvalósítása a lineáris regresszióra épülő fuzzy következtetés. Ebben az esetben az előállított modell pontosságát a felhasznált szabályok száma és ezeknek a megfigyeléstől mért távolsága határozza meg.

A [8] által ajánlott módszerben egy ún. mozgó ablakot definiálnak, és csak a megfigyelés – távolságmértékkel vagy szabályszámmal - megadott környezetében lévő szabályokat használják fel. A modell folytonosságát az ablak fuzzy jellegével biztosítják. Az egyes pontok az ablakban elfoglalt helyüknek megfelelő súlytényezővel (tagsági függvény értéke) vesznek részt a regressziós számításokban. A közelítő modell attól válik

folytonossá, hogy az egyes szabályoknak megfelelő pontok fokozatosan, mind nagyobb súllyal jelennek meg a számításokban.

## 7. Defuzzifikálási módszerek

A defuzzifikálás vagy más néven élesítés során a rendszer minden kimeno változójára megkeresik annak alaphalmazában azt az éles (crisp) értéket, ami a leginkább jellemző a következtetés eredményeképpen keletkezett fuzzy halmazra. A Sugeno következtetéssel dolgozó rendszerek esetén ez a lépés nem szükséges, mivel azoknál a döntéshozó logika eleve éles értéket állít elő.

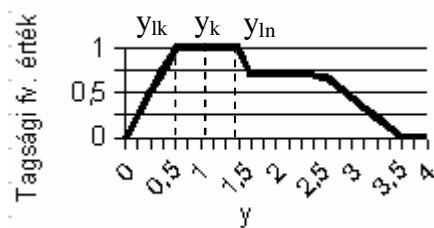
A szakirodalomban igen sokféle élesítési módszerrel találkozhatunk, és ezek általában teljesen eltérő eredményt nyújtanak. A technikák összehasonlításánál és a kiválasztásnál szerepet játszhat [15] a

1. könnyű számíthatóság, azaz mennyire gyorsan tudjuk előállítani az eredményt;
2. az eredmény könnyű értelmezhetősége;
3. arányosság, azaz az előállt fuzzy halmazban bekövetkező kisebb változás ne okozzon nagy változást az éles értékben;
4. egyértelműség, azaz az algoritmus minden helyzetben egyértelmű és egyetlen kimeno értéket szolgáltatson
5. és egyéb, az adott alkalmazásterületre jellemző szempontok.

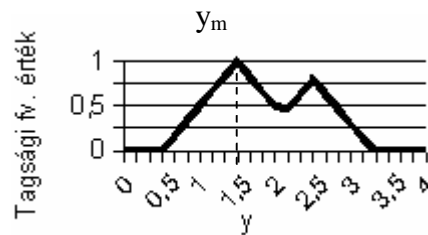
Az alábbiakban néhány gyakran alkalmazott technika áttekintése következik.

### 7.1. Maximum módszer

A maximum módszer alkalmazásakor az alaphalmaz azon elemét jelölik ki, amelyik a legjobban a fuzzy halmazhoz tartozik, azaz tagsági függvényének értéke a legnagyobb (7.2. ábra). Előnye a könnyű számíthatóság, hátránya az, hogy az így módon kapott eredmény nehezen értelmezhető. Lapos tetejű halmaz esetén három stratégia közül lehet választani (7.1. ábra), az eredmény a maximális tagsági értékkel rendelkezők közül:



7.1. ábra. Maximum módszer lapos tetejű tagsági függvényével



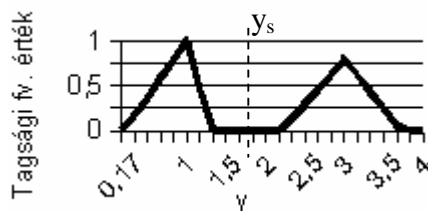
7.2. ábra. Maximum módszer egy maximumponttal

1. a legkisebb (bal szélso) univerzum-elem ( $y_{lk}$ )
2. a középső univerzum elem ( $y_k$ )
3. a legnagyobb (jobb szélso) univerzum-elem ( $y_{ln}$ )

A maximum módszerrel előállított értéket a „leghihetőbb” megoldásként szokták jellemezni, gyakran alkalmazzák alakzat-felismerési, osztályozási feladatoknál.

## 7.2. Súlypont módszer

A súlypont módszer alkalmazása esetén a fuzzy halmaz súlypontjának abszcissza értéke határozza meg az eredményt. A kapott éles érték általában jól alkalmazható, de nehéz a számítása.



7.3. ábra.

A módszer hátránya, hogy könnyen elfordulhat, hogy a súlypont nem része a felületnek, azaz a tagsági függvény értéke az adott pontban nulla, vagy a pont nem része a kimeneti változó alaphalmazának, ennek ellenére ezt nevezik a legjobb kompromisszumos megoldásnak.

A súlypont módszer a kimeneti fuzzy halmaz legjellemzőbb eleméül a halmaz elemeinek tagsági értékekkel súlyozott átlagát választja.  $N$  pontból álló diszkrét kimeneti halmaz esetén a (7.1), míg folytonos esetben a (7.2) szolgáltatja az eredményt. Utóbbinál az  $y_{\min}$  és  $y_{\max}$  a kimeneti alaphalmaz szélsőértékei.

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^n m(y_i) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m(y_i)} \quad (7.1)$$

$$y_s = \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} m(y_i) \cdot y_i \cdot dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} m(y_i) \cdot dy} \quad (7.2)$$

## 7.3. Súlyozott maximum módszer

A numerikus integrálszámítás nagy időigénye megnehezíti a valószerű alkalmazást, ezért ilyen esetekben előnyös lehet a crisp érték közelítő képlettel történő meghatározása. Egyik közelítési lehetőség az, hogy a következtetés utolsó lépésében nem képzik az egyes tüzelő szabályok következményeként előálló fuzzy halmazok unióját, hanem minden ilyen halmazra külön megkeresik az ott legjobban jellemző éles értéket (a jelen esetben a maximumot), majd ezen crisp értékek súlyozott átlagát számítják. A súlytényező az egyes szabályok aktivitási foka, azaz az éles értékhez tartozó tagsági érték.

## 8. Irodalomjegyzék

- [1] Ali, Y. M. – Zhang, L.: A methodology for fuzzy modeling of engineering systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 118/2001. pp 181-197.
- [2] Borgulya, I.: *Neurális hálók és fuzzy-rendszerek*, Dialóg Campus, Budapest-Pécs, 1998.
- [3] Cheng, H. D. – Chen, J. R.: Automatically Determine the Membership Function Based on the Maximum Entropy Principle, *Information Sciences* 96 (1997), pp. 163-182.
- [4] Dubois, D. – Prade, H.: Gradual rules in approximative reasoning, *Information Science*, 61 (1992), pp. 103-122.
- [5] *Fuzzy Logic Toolbox For Use with MATLAB. User's Guide. Version 2*, The MathWorks, Inc., Natick, 2002.
- [6] Klir, G. J.; Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, N.Y. 1995.
- [7] Kóczy T. László és Tikk Domonkos: *Fuzzy rendszerek*, Typotex Kiadó, 2000, ISBN 963-9132-55-1
- [8] Kóczy T. László: Inference in fuzzy rule bases with conflicting evidence, *Proceedings of NAFIPS Conference, NASA Conference Publication 10112, Vol. II.*, pp. 608-614.
- [9] Kóczy T. László: Techniques of inference in insufficient and inconsistent fuzzy rule base, 14<sup>th</sup> Linz Seminar on Fuzzy Set Theory: Non-Classical Logics and their Applications, pp. 46-50, Linz, 1992.
- [10] Kovács Szilveszter: *Fuzzy logikai irányítás*, Budapest, 1993.
- [11] Mamdani, E. H. – Assilian, S.: An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, *International Journal of Man Machine Studies*, 7(1)/1975. pp. 1-13.
- [12] Müller, G.: *Fuzzy Logic*, Technische Universität München, Institut für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften, 1997.  
<http://www.informatik.tu-muenchen.de/~muellerg/docs/FuzzyLogic>
- [13] Negnevitsky, M.: *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems*, Addison Wesley, Pearson Education Limited, 2002.
- [14] Országh László: *Angol-magyar kéziszótár*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.
- [15] Retter Gyula: *Fuzzy, neurális, genetikus, kaotikus rendszerek. Bevezetés a "lágy számítás" módszereibe*. Invest-Marketing Bt., Budapest, 2003. ISBN 963 212 780 3
- [16] Sántáné Tóth Edit: *Tudásalapú technológia, szakérto rendszerek*, Miskolci Egyetem Dunaújvárosi Foiskolai Kar, Dunaújváros, 2000.
- [17] Siler, W. – Ying, H.: Fuzzy control theory, *Fuzzy Sets and Systems*, Volume 33, Issue 3, 1989., pp. 275-290.
- [18] Vass Gy, Kalmár L., Kóczy L. T.: Extension of the fuzzy rule interpolation method, *Proceedings of the International Conference on Fuzzy Sets Theory and*

its Applications, 1992.

- [19] Wen-Hoar Hsiao, Shyi-Ming Chen, chia-Hoang Lee: A new interpolative reasoning method in sparse rule-based systems, *Fuzzy Sets and Systems* 93 (1998), pp. 17-22.
- [20] Yam, Y., Kóczy, L. T.: Representing membership functions as points in high dimensional spaces for fuzzy interpolation and extrapolation. Technical Report CUHK-MAE-97-03, Dept. of Mechanical And Automation Eng., The Chinese Univ. of Hong Kong, 1997.
- [21] Yan, S., Mizumoto, M., Wu Zhi Qiao: Reasoning conditions on Koczy's interpolative reasoning method in sparse fuzzy rule bases, *Fuzzy Sets and Systems* 75 (1995) 63-71.
- [22] Zadeh, L. A.: Fuzzy sets, *Inform. and Control* 8 (1965), pp. 338-353.
- [23] Zadeh, L. A.: Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23/1968, pp. 421-427.

## 9. Tartalomjegyzék

1. Bevezeto.....	1
2. Fuzzy logikai alapismeretek.....	2
Alapfogalmak .....	2
3. A tagsági függvény alakja és típusa.....	6
3.1. Gyakran alkalmazott tagsági függvény típusok.....	6
3.2. A tagsági függvények jellemzőinek meghatározása .....	9
3.1. Nyelvi változók és nyelvi értékek.....	9
3.2. Fuzzy halmaztípusok kiválasztása .....	9
3.2.1. Defuzzifikálást igénylo rendszerek .....	10
3.2.2. Defuzzifikálást nem tartalmazó rendszerek .....	10
3.2.3. Általános szempontok.....	11
3.2.4. Neuro-fuzzy rendszerek.....	12
3.2.5. Genetikus algoritmusokat alkalmazó hibrid rendszerek.....	13
3.2.6. Paraméter-meghatározás kereséssel .....	13
4. Muveletek fuzzy halmazokkal.....	15
4.1. Komplementképzés.....	15
4.1.1. Komplementképzés általánosan.....	15
4.1.2. Komplementképző függvények .....	15
4.2. Metszet .....	16
4.2.1. Metszetképzés általánosan.....	16
4.2.2. Metszetképző operátorok.....	16
4.3. Unió.....	18
4.3.1. Unióképzés általánosan .....	18
4.2.2. Unióképző operátorok .....	18
5. Relációk.....	20
5.1. Hagyományos relációk.....	20
5.2. Fuzzy relációk.....	20
6. Fuzzy következtetési módszerek .....	22
6.1. Mi a következtetés?.....	22
6.2. Következtetés fuzzy rendszerekben .....	22
6.3. Suru (lefedo) szabálybázisra épülő módszerek.....	22
6.3.1. Kompozíciós fuzzy következtetés.....	23
6.3.2. Kompakt fuzzy következtetés .....	25
6.3.3. Sugeno féle fuzzy következtetés .....	25

6.3.4. Keresotáblán (look-up table) alapuló fuzzy következtetés.....	27
6.4. Ritka (nem lefedo) szabálybázisra épülő módszerek.....	27
6.4.1. Fuzzy halmazok hasonlóságának mérése.....	28
6.4.2. Fontosabb fogalmak.....	29
6.4.2.1. Fuzzy halmazok távolsága.....	29
6.4.2.2. Közép fuzzy távolság.....	29
6.4.2.3. Fuzzy szélesség.....	29
6.4.3. Szabályok lineáris interpolációján alapuló fuzzy következtetés.....	29
6.4.4. Módosított a-vágat alapú interpoláció.....	31
6.4.5. Szabályok lineáris extrapolációján alapuló fuzzy következtetés.....	32
6.4.6. Fuzzy szabályok lineáris regressziójára épülő fuzzy következtetés.....	32
7. Defuzzifikálási módszerek.....	34
7.1. Maximum módszer.....	34
7.2. Súlypont módszer.....	35
7.3. Súlyozott maximum módszer.....	35
8. Irodalomjegyzék.....	36
9. Tartalomjegyzék.....	38